Part 01 のトピックス　基底・次元・正規直交基底．

復習① $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell \in \mathbb{R}^n$

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_\ell) \underset{\text{行基本変形}}{\rightarrow \cdots \rightarrow} (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_\ell)$$

のとき

$$c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_\ell \vec{a}_\ell = \vec{0} \iff c_1\vec{e}_1 + \cdots + c_\ell \vec{e}_\ell.$$

（線型独立性）

復習② $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell \in \mathbb{R}^n$ が 線型独立 $\overset{\text{定義}}{\iff} \left(c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_\ell \vec{a}_\ell = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_\ell = 0 \right)$

LI

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell$ が満たす線型関係には自明なものしかない．

復習③ $(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_\ell) \underset{\text{行基本変形}}{\rightarrow \cdots \rightarrow} (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_\ell)$ がある

$\Rightarrow \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell$ は LI

証明は見えて欲しい．

（以上復習）

③ の逆

定理1 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_l$ が LI $\Longrightarrow$ ある行基本変形で $(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_l) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_l)$

$l \leqq n$ とする.

$l=1$ $\vec{a}_1$ が LI $\Longleftrightarrow \vec{a}_1 \neq \vec{0}$ に注意.

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \text{行} \\ \\ \end{array} \quad \text{で } \alpha \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ * \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \Leftrightarrow jr} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \xrightarrow{1r \times = \frac{1}{\alpha}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \end{pmatrix}}_{\vec{b} \text{ とする}} \xrightarrow{ir += 1r \times (-b_i)\ (2 \leqq i \leqq n)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

$l-1$ まで OK とする $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_l$ が LI $\Longrightarrow \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{l-1}$ は LI

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_{l-1}\ \vec{a}_l) \xrightarrow{\text{帰納法の仮定}} (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_{l-1}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & b_{l-1} \\ & & & \boxed{/\!/\!/} \end{pmatrix}$$

$\boxed{/\!/\!/}$ の部分, すなわち $\begin{pmatrix} b_l \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が「$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_l$ が LI」から従う. ($= \vec{0}$ としたら矛盾)

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & b_{l-1} \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & \beta \neq 0 \\ & & & * \end{array}\right) \xrightarrow[l\text{行} \leftrightarrow l'\text{行}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \beta \\ & & & * \end{array}\right) \xrightarrow[l\text{行} \times \frac{1}{\beta}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & * \end{array}\right) \xrightarrow[i\text{行} + l\text{行} \times (-c_i)\ (i \neq l)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{array}\right) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_{l-1} | \vec{e}_l)$$

β を l'行とする

(右辺第3の行列の最終列) $= \vec{c}$

で証明がされる.

この定理はいろいろな応用を含んでいることに注意.

<u>定理2</u> $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_l \in \mathbb{R}^n$ において $l > n$ ならば

<u>$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_l$ は線型従属 (LD)</u>

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n \cdots \vec{a}_l}}^{l} \\ n\left\{ \left[\begin{array}{c|c} \vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n & \cdots \vec{a}_l \end{array} \right] \right. \end{array}$$

(証明) ① <u>$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ が LD のとき</u>. $\exists c_j \neq 0$ で $c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$

これは $c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n + 0\vec{a}_{n+1} + \cdots + 0\vec{a}_l = \vec{0}$ で $\exists c_j \neq 0$.

従って $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_l$ が LD を意味する.

② <u>$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ が LI のとき</u>. $(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n\ \vec{a}_{n+1} \cdots) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n\ \vec{b} \cdots)$

$-b_1\vec{e}_1 - \cdots - b_n\vec{e}_n + \vec{b} = \vec{0}$ から $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, \cdots, \vec{a}_l$ は LD.

実は定理2は次元を定めるとき重要な役割を果たす。このことがL13で最も重要な点である。そのために復習から始める。

復習④　$V(\subset \mathbb{R}^n)$ が部分空間とは　$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V$

（・と＋について閉じている）

⑤, ⑥は補足問題1（L07_0531）

復習⑤（核）A が m 行 n 列の行列のとき。

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n ; A\vec{v} = \vec{0}\} \ (\subset \mathbb{R}^n)$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間。実際

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow A\vec{v}_1 = A\vec{v}_2 = \vec{0}$　このとき　$A(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2 = \underbrace{\lambda\vec{0} + \mu\vec{0}}_{=\vec{0}}$

復習⑥（像）

$$\mathrm{Im}(A) = \{A\vec{v} \in \mathbb{R}^m ; \vec{v} \in \mathbb{R}^n\} \ (\subset \mathbb{R}^m)$$

は $\mathbb{R}^m$ の部分空間。$A\vec{v} = v_1\vec{a}_1 + \cdots + v_n\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に注意。

$\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathrm{Im}(A)$ のとき $\vec{w}_1 = A\vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = A\vec{v}_2$ を満たす $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ が存在。このとき

$\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 = \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2 = A(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) \in \mathrm{Im}(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 2 & 12 & 12 \\ -3 & 15 & -4 & -33 & -24 \\ -6 & 9 & -1 & 9 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

から

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{cases} x_1 - x_3 - \frac{2}{3}x_5 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 0 \end{cases}$$

なので

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_3 + \frac{2}{3}x_5 \\ \frac{1}{3}x_3 + x_5 \\ x_3 \\ \frac{1}{3}x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(鉄則)
← ピボットのない列の変数で解は表現できる

から $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}(A)$ を生成する

3行と5行において $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ から $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$. 以上をもって $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ は $\mathrm{Ker}(A)$ の基底である.

注意 $\vec{x} = \frac{1}{3}x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ から $\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}(A)$ の基底.

定義 $V \subset \mathbb{R}^n$ $(\neq \{\vec{0}\})$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする. $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell \in V$ が V の基底 とは

① $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$ は V を生成する. i.e. $\forall \vec{v} \in V$ は $\vec{v} = *_1 \vec{p}_1 + \cdots + *_\ell \vec{p}_\ell$ とかける.

② $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$ は LI.

定理3 V $(\neq \{\vec{0}\})$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間 とする.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell \text{ は } V \text{ の基底} \\ \vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_{\ell'} \text{ ——} \end{array}\right\} \Longrightarrow \ell = \ell'$$

証明　$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は V の基底，$\vec{q}_1, \vec{q}_2$ は V の基底とすると矛盾が生じることを見てみることにとどめる．

$$\vec{p}_1 = c_{11}\vec{q}_1 + c_{12}\vec{q}_2$$
$$\vec{p}_2 = c_{21}\vec{q}_1 + c_{22}\vec{q}_2$$
$$\vec{p}_3 = c_{31}\vec{q}_1 + c_{32}\vec{q}_2$$

となる

$$(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{pmatrix}$$

となる．このとき $\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ $\quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ 　これは

$$x\vec{p}_1 + y\vec{p}_2 + z\vec{p}_3 = \vec{0}$$

を意味する．これは $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ がLIであることに反する．

<u>定義</u>　定理3の l を V の次元と呼ぶ．

例1 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,;\, x + y + z + w = 0 \right\}$ は $\mathbb{R}^4$ の部分空間である. $A = (1\ 1\ 1\ 1)$

に対して $V = \mathrm{Ker}(A)$; あるいは $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ に対して $\vec{x}, \vec{y} \in V$ とすると

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$$

このとき $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \lambda x_3 + \mu y_3 \\ \lambda x_4 + \mu y_4 \end{pmatrix}$ は

$$\begin{aligned} &(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3) + (\lambda x_4 + \mu y_4) \\ &= \lambda (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \mu (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

から $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in V$.

<u>Vの基底を求めよう.</u> $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ とする.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z - w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から V は $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られる.

$\vec{0} = c_1\vec{q}_1 + c_2\vec{q}_2 + c_3\vec{q}_3 = \begin{pmatrix} -c_1-c_2-c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とすると $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となるので

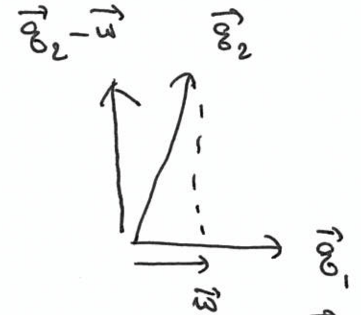
$\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ は LI. よって $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ は V の基底である.

次に V の正規直交基底を求めよう.　$\vec{p}_1 = \dfrac{1}{\|\vec{q}_1\|}\vec{q}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\|\vec{p}_1\| = 1$,　$\vec{p}_1 \in V$ に注意

$\vec{q}_2$ の $\vec{q}_1$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は $\vec{w} = \dfrac{(\vec{q}_1, \vec{q}_2)}{\|\vec{q}_1\|^2}\vec{q}_1 = \dfrac{1}{2}\vec{q}_1$

$\vec{p}_1$ に垂直な $\vec{q}_2 - \vec{w} = \vec{q}_2 - \dfrac{1}{2}\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ を正規化して

$\vec{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると　$\vec{p}_2 \in V$　$\|\vec{p}_2\| = 1$,　$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$

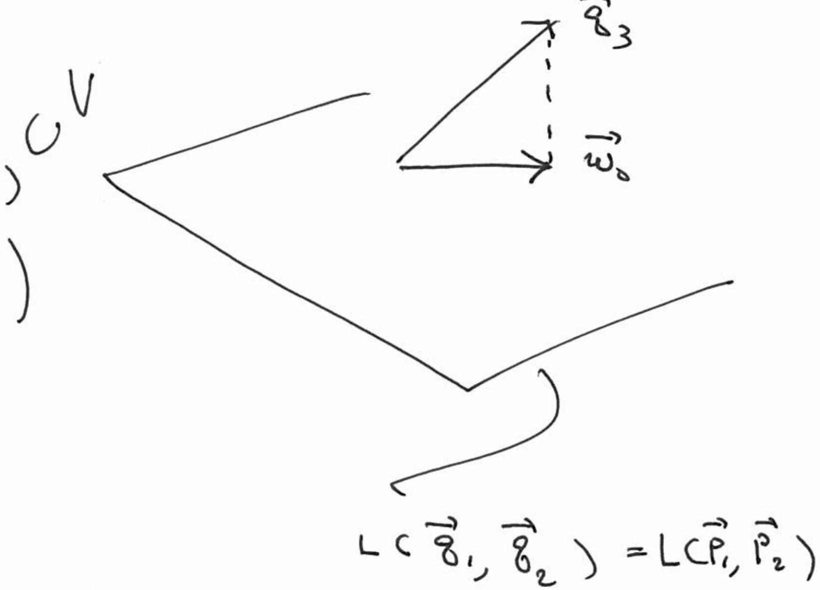


次に $\vec{q}_3$ の $L(\vec{q}_1, \vec{q}_2)$ への直交射影 $\vec{w}_0$ を求める. $\vec{w}_0$ は

$$\vec{w}_0 = (\vec{p}_1, \vec{q}_3)\vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{q}_3)\vec{p}_2 \quad \leftarrow \vec{w}_0 \in L(\vec{q}_1, \vec{q}_2)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ に垂直な $\vec{q}_3 - \vec{w}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を正規化して

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とすると $\vec{p}_3 \in V$. このとき $\|\vec{p}_3\| = 1$, $(\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$. が成立する. 以上で

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in V$ は V の正規直交系であることが分かる. このとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in V$ は LI. 問

さらに 定理4 から $L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = V$ が分かる. $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は V の 正規直交系で V の基底.

問 「$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell \in \mathbb{R}^n$ が正規直交系 $\Longrightarrow$ $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$ は LI」

定理4 $V, W \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする.

(1) $V \subset W \Longrightarrow \dim V \leq \dim W$

(2) $V \subset W$ かつ $\dim V = \dim W \Longrightarrow V = W$

上では $L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \subset V$ で両方3次元なので $L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = V$.