基底に関する補足

定理

$V(\subset \mathbb{R}^n)$ は部分空間とする. $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell \in V$ が基底とする.

$\vec{p}_{\ell+1} \notin V \Longrightarrow \vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell, \vec{p}_{\ell+1}$ は LI

(証明) $c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_\ell\vec{p}_\ell + c_{\ell+1}\vec{p}_{\ell+1} = \vec{0}$

とする. $c_{\ell+1} \neq 0$ とすると $\vec{p}_{\ell+1} = -\frac{1}{c_{\ell+1}}(c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_\ell\vec{p}_\ell) \in V$

と矛盾するので $c_{\ell+1} = 0$. このとき $c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_\ell\vec{p}_\ell = \vec{0}$ から $c_1 = \cdots = c_\ell = 0$. □

この定理を使うと次の定理が示せる.

定理 $V \subset W \subset \mathbb{R}^n$ を満たす部分空間 V, W があって

V の基底 $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$ が与えられているとする.

$\Longrightarrow$ W の基底 $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell, \vec{p}_{\ell+1}, \cdots, \vec{p}_m$ が存在する.

これから

定理 $V \subset W \subset \mathbb{R}^n$ を満たす部分空間 V, W があるとき,

(1) $\dim V \leq \dim W$

(2) $\dim V = \dim W \Longleftrightarrow V \subset W$