2次正方行列の正則性

2次正方行列

$$A \in M_2(\mathbb{R})$$

が正則であるとは $\exists X \in M_2(\mathbb{R})$ が存在して

$$AX = XA = I_2$$

が成立することである．X については一意性があって A^{-1} と書いて A の逆行列と呼んだ．

A が正則であることの言い換えにはいろいろあるが，次が基本的である．

定理 次の (1), (2), (3) は同値である．

(1) A は正則である．

(2) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

(3) $|A| \neq 0$

証明に入る前に (2) の条件について言い換えておこう．

$A = (\vec{a_1}\ \vec{a_2})$ とすると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a_1} + y\vec{a_2}$$

なので

$$(2) \Longleftrightarrow \left(x\vec{a_1} + y\vec{a_2} = \vec{0} \Rightarrow x = y = 0\right)$$

と言い換えることが分かる．従って

$$(2) \overset{(2)'}{\Longleftrightarrow} A = (\vec{a_1}\ \vec{a_2}) \text{ とすると } \vec{a_1} \nparallel \vec{a_2}$$

であることが分かります．

証明に入ります.

<u>(1) ⇒ (2)</u>　A が正則であるとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

のとき 左から A^{-1} をかけると

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

で $A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ が従います.

注　(1) ⇒ (2) の対偶は

Not (2) ⇒ Not (1) すなわち

$\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ を満たす ⇒ A は正則でない.

となります.

$$(\vec{0}\ \vec{a_2})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\vec{0} + 0\cdot\vec{a_2} = \vec{0}$$

$$(\vec{a_1}\ \vec{0})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\cdot\vec{a_1} + 1\cdot\vec{0} = \vec{0}$$

から $(\vec{0}\ \vec{a_2})$, $(\vec{a_1}\ \vec{0})$ は正則でないことが分かります.
従って

$$A = (\vec{a_1}\ \vec{a_2}) \text{ が正則} \Rightarrow \vec{a_1} \neq \vec{0},\ \vec{a_2} \neq \vec{0}$$

が示されました.

<u>(2) ⇒ (3)</u>　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とすると

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|I_2$$

が従います. これを用いて Not (3) ⇒ Not (2) すなわち

$$|A| = 0 \Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を示します.

$|A| = 0$ とすると

$$A\tilde{A} = 0 \cdot I_2 = O_2$$

従って

$$A\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad A\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が成立します.

$d \neq 0$, $c \neq 0$ のとき $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$b \neq 0$, $a \neq 0$ のとき $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

なので

※ $a \neq 0$ OR $b \neq 0$ OR $c \neq 0$ OR $d \neq 0$

のとき $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在する

ことが示されました. ※ を否定した

$$a = b = c = d = 0$$

のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

なのですべての $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ が分かります.

(3) ⇒ (1)　$|A| \neq 0$ とします.

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| I_2$$

の各辺を $\frac{1}{|A|}$ 倍すると

$$A\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)A = I_2$$

から A は正則であることが分かります.

$$\begin{tikzcd} & (1) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ (3) \arrow[ur, Rightarrow] & & (2) \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

(1) ⇒ (3)　A が正則とすると

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

ですが，この両辺の行列式をとると

$$|A\tilde{A}| = |I_2| = 1, \quad |A\tilde{A}| = |A| \cdot |\tilde{A}|$$

から $|A| \neq 0$ が分かります．

(3) ⇒ (2)　$|A| \neq 0$ とします．

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{o}$$

とするとクラメールの公式から

$$x = \frac{1}{|A|}\left|\vec{o}\ \vec{a}_2\right| = 0, \quad y = \frac{1}{|A|}\left|\vec{a}_1\ \vec{o}\right| = 0$$

から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{o}$ が従います．