

## 演習問題

**I**  $z, w \in \mathbf{C}$  に対して

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

を示しましょう。

**II (1)**  $a, b \in \mathbf{R}$  が  $a, b \geq 0$  を満たすとします。

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

を示しましょう。

**(2)**  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$  が

$$a_1, \dots, a_n \geq 0$$

を満たすとします。

$$a_1 + \dots + a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

が成立することを示しましょう。

**III (1)**  $z, w \in \mathbf{C}$  に対して

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

を示しましょう。

**(2)**  $z \in \mathbf{C}$ ,  $z \neq 0$  のとき

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

を示しましょう。

**(3)**  $z \in \mathbf{C}$  であるとき

$$z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

を示しましょう。

**(4)** 実係数の多項式

$$f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

を考えます。すなわち上の式において

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$$

とします。このとき  $\alpha \in \mathbf{C}$  に対して

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$$

を示しましょう。

IV  $P_1(x), P_2(x) \in \mathbf{K}[x]$  に対して

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = 0 \Rightarrow P_1(x) = 0 \text{ または } P_2(x) = 0$$

であることを示しましょう.

V  $z, w \in \mathbf{C}$  が  $z, w \neq 0$  を満たしているとします.

$$z = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad w = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

と極形式で表されるとき

$$zw = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z^{-1} = r_1^{-1} (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1))$$

となることを示しましょう.

VI

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \neq 1$$

であるとき

$$z^{\frac{1}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}$$

とします. このとき

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - 1}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})}$$

であることを用いて

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta, \quad \sum_{k=0}^n \sin k\theta$$

を求めましょう.

VII(1)  $\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \alpha \neq \gamma$  とします. このとき

$$g(x) = \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

が

$$g(\alpha) = 1, \quad g(\beta) = g(\gamma) = 0$$

を満たすことを示しましょう.

(2) (1) において  $A, B, C \in \mathbf{C}$  とします.  $f$  が 2 次多項式で

$$f(\alpha) = A, \quad f(\beta) = B, \quad f(\gamma) = C$$

ならば

$$f(x) = A \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + B \frac{(x - \alpha)(x - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + C \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

となることを示しましょう.

**VIII**  $a, b \in \mathbf{R}$  とします.

$$f(x) = ax^4 - 2ax^3 + (a+1)x^2 - bx - b$$

において

$$f\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

とします.

(1)  $a, b$  を求めましょう.

(2)  $f$  の他の根を求めましょう.

**IX**

$$f(x) = x^{2n} + x^n + 1$$

が  $x^2 + x + 1$  で割り切れるか調べましょう.

**X**

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

とします.

(1)  $z^n - 1 = 0$  の解が  $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$  であることを示しましょう.

(2)

$$(1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \cdots (1 - \alpha^{n-1}) = n$$

となることを示しましょう.

**XI** 以下の多項式  $f(x), g(x)$  の最大共通因子を最高次数の係数が 1 として求めましょう.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = 4x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 11x + 3$$

**XII**  $z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$  を満たす  $z \in \mathbf{C}$  をすべて求めましょう.

**XIII**  $a, b, c, d \in \mathbf{C}$  が  $ad - bc \neq 0$  を満たすとする.  $\mathbf{C}$  の部分集合  $D$  を

$$D = \begin{cases} \mathbf{C} & (c = 0 \text{ のとき}) \\ \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & (c \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とします. 写像

$$f: D \rightarrow \mathbf{C} \quad z \mapsto w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

によって定義する.

(1)  $f$  が単射であることを示しましょう.

(2)  $f(D)$  を求めましょう.

(3) 全単射  $f: D \rightarrow f(D)$  の逆写像  $f^{-1}$  を求めましょう.

**XIV**  $\mathbf{C}$  の部分集合  $D := \mathbf{C} \setminus \{i\}$  上で定義された写像

$$f: D \rightarrow \mathbf{C} \quad z \mapsto w = f(z) = \frac{1-iz}{1+iz}$$

について考えます.

- (1)  $f(D) \subset \mathbf{C} \setminus \{-1\}$  であることを示しましょう.
- (2)  $f(D) = \mathbf{C} \setminus \{-1\}$  であることを示しましょう.
- (3)  $f$  が単射であることを示しましょう.
- (4) 全単射  $f: D \rightarrow f(D)$  の逆写像を求めましょう.
- (5)  $A = \{z \in D; |z - (1+i)| = 1\}$  に対して  $f(A)$  を求めましょう.
- (6)  $f(\mathbf{R})$  を求めましょう.

**XV** 実数列  $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$  を差分方程式

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad a_0 = \alpha, a_1 = \beta$$

によって定義します.  $a_n$  を求めましょう. ただし解が最終的に虚数単位を含まないものにしましょう.

I  $z, w \in \mathbf{C}$  に対して

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

を示しましょう。

解答

$$z = a + ib, \quad w = c + id \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

と  $z$  と  $w$  の実部と虚部を表します。このとき

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

から

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2 \cdot |w|^2 \end{aligned}$$

が従います。  $|z|, |w|, |zw| \geq 0$  なので両辺の平方根をとると

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

であることが分かります。

II(1)  $a, b \in \mathbf{R}$  が  $a, b \geq 0$  を満たすとします。

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

を示しましょう。

(2)  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$  が

$$a_1, \dots, a_n \geq 0$$

を満たすとします。

$$a_1 + \dots + a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

が成立することを示しましょう。

解答 (1) ( $\Leftarrow$ ) は明らかですから ( $\Rightarrow$ ) を証明します。

$a > 0$  とすると  $b = -a < 0$  となりますから  $b \geq 0$  に反します。従って  $a \leq 0$  であることが分かります。ここで条件  $a \geq 0$  を用いると  $a = 0$  が分かります。  $a + b = 0$  を仮定していますから  $b = 0$  も従います。以上で

$$a = b = 0$$

であることを示しました.

(2) ( $\Leftarrow$ ) は明らかですから ( $\Rightarrow$ ) を証明します. 帰納法を用いて証明しますから  $n-1$  で成立するとします.

$$a_1 + \dots + a_{n-1} \geq 0, \quad a_n \geq 0$$

が成立しますから (1) を用いると  $a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = 0$  から

$$a_1 + \dots + a_{n-1} = 0, \quad a_n = 0$$

が従います. (n-1) の場合 (帰納法の仮定) を用いると  $a_1 + \dots + a_{n-1} = 0$  から

$$a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$$

も従います. 以上で  $a_1, \dots, a_n \geq 0$  の下で

$$a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$$

が従うことを示しました.

**III (1)**  $z, w \in \mathbf{C}$  に対して

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

を示しましょう.

(2)  $z \in \mathbf{C}$ ,  $z \neq 0$  のとき

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

を示しましょう.

(3)  $z \in \mathbf{C}$  であるとき

$$z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

を示しましょう.

**解答 (1)**

$$z = a + ib, \quad w = c + id \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

と  $z$  と  $w$  の実部と虚部を表します. このとき

$$z \pm w = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

から

$$\begin{aligned} \overline{z \pm w} &= (a \pm c) - i(b \pm d) \\ \overline{z \pm w} &= \overline{a + ib \pm c + id} \\ &= (a - ib) \pm (c - di) \\ &= (a \pm c) - i(b \pm d) \end{aligned}$$

となるので

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$$

が従います.

(2) 次に

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + i(bc + ad)} \\ &= (ac - bd) - i(bc + ad) \\ \bar{z} \cdot \bar{w} &= (a - ib)(c - id) \\ &= (ac - bd) - i(bc + ad) \end{aligned}$$

から

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

が従います. 最後に

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

から

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}$$

が分かります.

(3)

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a - ib} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}$$

が分かりますから

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

が従います.

(3)  $z = a + ib$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) とします.  $z = a \in \mathbf{R}$  とすると

$$\bar{z} = a = z$$

から  $z = \bar{z}$  が従います. 逆に  $z = \bar{z}$  とすると

$$a + ib = a - ib \quad \text{から} \quad b = 0$$

が従いますから,  $z = a \in \mathbf{R}$  であることが分かります.

**III(4) 実係数の多項式**

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

を考えます. すなわち上の式において

$$a_0, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$$

とします. このとき  $\alpha \in \mathbf{C}$  に対して

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$$

を示しましょう.

**解答**  $f(\alpha) = 0$  すなわち

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad (1)$$

が成立するとします.

$$\overline{\alpha^k} = (\bar{\alpha})^k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

が成立することを帰納的に示せますから, (1) の両辺の複素共役をとると

$$\begin{aligned} \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0} &= \overline{a_n} \cdot \overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_0} \\ &= a_n \cdot \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 \\ &= f(\bar{\alpha}) = 0 \end{aligned}$$

が分かります.

**IV  $P_1(x), P_2(x) \in \mathbf{K}[x]$  に対して**

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = 0 \Rightarrow P_1(x) = 0 \text{ または } P_2(x) = 0$$

であることを示しましょう.

**解答**  $P_1, P_2$  が  $\deg(P_1), \deg(P_2) \geq 0$  とすると

$$\deg(P_1 P_2) = \deg(P_1) + \deg(P_2) \geq 0$$

となり,  $P_1 P_2 = 0$  となりません. 従って

$$\deg(P_1) = -\infty \text{ または } \deg(P_2) = -\infty$$



すなわち

$$P_1 = 0 \quad \text{または} \quad P_2 = 0$$

となります.

$\forall z, w \in \mathbf{C}$  が  $z, w \neq 0$  を満たしているとします.

$$z = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad w = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

と極形式で表されるとき

$$zw = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z^{-1} = r_1^{-1} (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1))$$

となることを示しましょう.

解答

$$\begin{aligned} zw &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)} \\ &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\cos \theta_1 - i \sin \theta_1}{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)} \\ &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)}{\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1} = \frac{1}{r_1} \cdot (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)) \end{aligned}$$

VI

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \neq 1$$

であるとき

$$z^{\frac{1}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}$$

とします. このとき

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - 1}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})}$$

であることを用いて

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta, \quad \sum_{k=0}^n \sin k\theta$$

を求めましょう.

解答  $z = \cos \theta + i \sin \theta \neq 1$  のとき帰納法を用いると

$$z^k = \cos k\theta + i \sin k\theta \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成立することが分かります. さらに

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos k\theta + i \sum_{k=0}^n \sin k\theta &= \sum_{k=0}^n (\cos k\theta + i \sin k\theta) \\ &= \sum_{k=0}^n z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \\ &= \frac{z^n - 1}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})} = \frac{z^{\frac{n+1}{2}}(z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}})}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})} = z^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \left( \cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right) \cdot \frac{2 \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + i \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

から

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad \sum_{k=0}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

であることが分かります.

**VII(1)**  $\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \alpha \neq \gamma$  とします. このとき

$$g(x) = \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

が

$$g(\alpha) = 1, \quad g(\beta) = g(\gamma) = 0$$

を満たすことを示しましょう.

(2) (1) において  $A, B, C \in \mathbf{C}$  とします.  $f$  が 2 次多項式で

$$f(\alpha) = A, \quad f(\beta) = B, \quad f(\gamma) = C$$

ならば

$$f(x) = A \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + B \frac{(x - \alpha)(x - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + C \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

となることを示しましょう.

**解答 (1) 省略**

(2)

$$h(x) = A \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + B \frac{(x - \alpha)(x - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + C \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

と定義します. このとき

$$h(\alpha) = A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = A$$

$$h(\beta) = A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 = B$$

$$h(\gamma) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 = C$$

となりますから

$$(f - h)(\alpha) = (f - h)(\beta) = (f - h)(\gamma) = 0$$

が従います. さらに

$$\deg(f - h) \leq 2$$

が成立しますから

$$f - h = 0$$

であることが分かります.

VIII  $a, b \in \mathbf{R}$  とします.

$$f(x) = ax^4 - 2ax^3 + (a+1)x^2 - bx - b$$

において

$$f\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

とします.

(1)  $a, b$  を求めましょう.

(2)  $f$  の他の根を求めましょう.

解答  $x_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  とします. このとき

$$\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \quad \text{から} \quad x_0^2 - x_0 + 1 = 0$$

が従います. 筆算

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x + 1 \quad ) \quad \begin{array}{r}
 ax^2 - ax + 1 - a \\
 \hline
 ax^4 - 2ax^3 + (a+1)x^2 - bx - b \\
 \hline
 ax^4 - ax^3 + ax^2 \\
 \hline
 - ax^3 + x^2 - bx - b \\
 \hline
 - ax^3 + ax^2 - ax \\
 \hline
 (1-a)x^2 - (b-a)x - b \\
 \hline
 (1-a)x^2 - (1-a)x + 1-a \\
 \hline
 (1-b)x + a-b-1
 \end{array}
 \end{array}$$

から

$$f(x) = (ax^2 - ax + (1-a))(x^2 - x + 1) + (1-b)x + a - b - 1 \quad (1)$$

と割り算できます.  $x = x_0$  を代入すると

$$0 = f(x_0) = (1-b)x_0 + a - b - 1$$

を得ます.  $b \neq 1$  ならば  $x_0 \in \mathbf{R}$  となりますから  $b = 1$  であることが分かります. さらに  $a - b - 1 = 0$  も成立しますから  $a = 2$  であることが分かります. (1) は

$$f(x) = (2x^2 - 2x + 1)(x^2 - x + 1)$$

となりますから,  $x_0$  と異なる解は

$$x = \frac{1 \pm i}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

であることが分かります.

別解  $x_0^2 - x_0 + 1 = 0$  の両辺に  $x_0 + 1$  を掛けると

$$x_0^3 + 1 = 0 \quad \text{従って} \quad x_0^3 = -1$$

であることが分かります. これから

$$\begin{aligned} f(x_0) &= ax_0^4 - 2ax_0^3 + (a+1)x_0^2 - bx_0 - b \\ &= -ax_0 + 2a + (a+1)(x_0 - 1) - bx_0 - b \\ &= (1-b)x_0 + a - b - 1 = 0 \end{aligned}$$

が従います.

**IX**

$$f(x) = x^{2n} + x^n + 1$$

が  $x^2 + x + 1$  で割り切れるか調べましょう.

解答

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

とおくと

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

となります. ここで  $f(x)$  を  $x^2 + x + 1$  で割り算しておきます. すなわち

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1) + Ax + B \tag{1}$$

を満たす  $A, B \in \mathbf{R}$  が存在します. ここで  $x = \omega$  を代入すると

$$f(\omega) = A\omega + B \tag{2}$$

となります. そこで  $f(\omega)$  を  $n$  を 3 で割った余りで場合分けして求めます.

(i)  $n = 3k$  のとき

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k} + \omega^{3k} + 1 = (\omega^3)^{2k} + (\omega^3)^k + 1 \\ &= 1^{2k} + 1^k + 1 = 3 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 3$$

となります. これを  $A\omega + (B - 3) = 0$  とすると  $\omega \notin \mathbf{R}$  から  $A = 0, B = 3$  となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1) + 3$$

となります.

(ii)  $n = 3k + 1$  のとき

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k+2} + \omega^{3k+1} + 1 = (\omega^3)^2 k\omega^2 + (\omega^3)^k \omega + 1 \\ &= 1^{2k}\omega^2 + 1^k\omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 0$$

となります.  $\omega \notin \mathbf{R}$  から  $A = 0, B = 0$  となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1)$$

となります.

(iii)  $n = 3k + 2$  のとき

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k+4} + \omega^{3k+2} + 1 = (\omega^3)^{2k+1} \omega + (\omega^3)^k \omega^2 + 1 \\ &= 1^{2k+1}\omega + 1^k\omega^2 + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 0$$

となります.  $\omega \notin \mathbf{R}$  から  $A = 0, B = 0$  となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1)$$

となります.

以上から  $f(x)$  が  $x^2 + x + 1$  で割り切れる必要十分条件は  $n$  が 3 で割り切れないことが示されました.

**X**

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

とします.

(1)  $z^n - 1 = 0$  の解が  $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$  であることを示しましょう.

(2)

$$(1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \cdots (1 - \alpha^{n-1}) = n$$

となることを示しましょう.

**解答**  $z^n = 1$  のとき  $|z|^n = 1$  から  $|z| = 1$  であることが分かります. 従って

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と  $\theta \in \mathbf{R}$  を用いて表されます.

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad 0 \leq n\theta < 2n\pi$$

から

$$n\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2(n-1)\pi$$

すなわち

$$\theta = \frac{2k}{n}\pi \quad (k = 1, 1, 2, \dots, n-1)$$

であることが分かります. 従って解は

$$z = 1, e^{i\frac{2}{n}\pi}, e^{i\frac{4}{n}\pi}, \dots, e^{i\frac{2(n-1)}{n}\pi}$$

は  $\alpha = e^{i\frac{2}{n}\pi}$  を用いて

$$z = 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$$

と表現されます. 以上で

$$z^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$$

であることが示されました. よって

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + \dots + z + 1) = (z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2) \dots (z-\alpha^{n-1})$$

から

$$z^{n-1} + \dots + z + 1 = (z-\alpha)(z-\alpha^2) \dots (z-\alpha^{n-1})$$

であることが示されました. ここで  $z=1$  を両辺に代入すると

$$n = (1-\alpha)(1-\alpha^2) \dots (1-\alpha^{n-1})$$

であることが従います.

**XI** 以下の多項式  $f(x), g(x)$  の最大共通因子を最高次数の係数が1として求めましよう.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = 4x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 11x + 3$$

解答

1	-2	5	-4	3		4	-12	15	-11	3
4	-8	20	-16	12	-)	4	-8	20	-16	12
+)										
-4	-5	5	-9				-4	-5	5	-9
	-13	25	-25	12			-4	4	-4	
		-52	100	-100	48			-9	9	-9
	-)	-52	-65	65	-117		-)	-9	9	-9
		165	-165	165				0	0	0
		1	-1	1						

上の計算から共通因子で最高次数の係数が1であるものは  $x^2 - x + 1$  であることが分かります。より詳しくは以下のようにして理解します。

$$\begin{aligned} g(x) - 4f(x) &= -4x^3 - 4x^5 + 5x - 9 (= r_1(x) \text{とします}) \\ 4f(x) - xr_1(x) &= -13x^3 + 25x^2 - 25x + 12 \\ \text{両辺を4倍して} \\ 16f(x) - 4xr_1(x) &= -52x^3 + 100x^2 - 100x + 48 \\ 16f(x) - 4xr_1(x) - 13r_1(x) &= 16f(x) - (4x + 13)r_1(x) \\ &= 165x^2 - 165x + 165 = 165(x^2 - x + 1) \\ r_1(x) &= -(4x + 9)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

**XII**  $z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$  を満たす  $z \in \mathbf{C}$  をすべて求めましょう。

**解答**

$$z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$$

の両辺の絶対値をとると

$$|z|^4 = 8 \cdot 2 = 16$$

となりますから  $|z| = 2$  であることが分かります。  $w = \frac{z}{2}$  と定めると

$$w^4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2}{3}\pi} \quad (1)$$

が成立します。  $|w| = 1$  が成立しますから

$$w = \cos \theta + i \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

である  $\theta \in \mathbf{R}$  が存在します。(1) から

$$e^{i4\theta} = e^{i\frac{2}{3}\pi}, \quad 0 \leq 4\theta < 8\pi$$

から

$$4\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \frac{20\pi}{3},$$

すなわち

$$\theta = \frac{2\pi}{12}, \frac{8\pi}{12}, \frac{14\pi}{12}, \frac{20\pi}{12}$$

となります。以上で

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, 2e^{i\frac{7\pi}{6}}, 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

であることが分かりました。