転置行列について　　２次正方行列　　①

$$A=(\vec{a}\ \vec{b})=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$${}^tA=\begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

を A の<u>転置行列</u>と呼びます　何故こんな妙なものを考えるかというと

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tA\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)$$

が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ に対して成立するからです. 実際,

$$(LHS)=\left(x\vec{a}+y\vec{b}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)$$

$$=x\left(\vec{a}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)+y\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \\ {}^t\vec{b}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tA\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)=(RHS)$$

と証明されます.

$X, Y\in M_2(\mathbb{R})$ に対して

$${}^t(XY)={}^tY\,{}^tX$$

が成立することは大事です. $\vec{p}, \vec{q}\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$(XY\vec{p}, \vec{q})=(\vec{p}, {}^t(XY)\vec{q})$$

と

$$(XY\vec{p}, \vec{q})=(Y\vec{p}, {}^tX\vec{q})=(\vec{p}, {}^tY\,{}^tX\vec{q})$$

から

$$(\vec{p},\ {}^t(XY)\vec{q}\,) = (\vec{p},\ {}^tY\,{}^tX\,\vec{q}\,)$$

が任意の $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$ で成立することから

$${}^t(XY)\vec{q} = {}^tY\,{}^tX\,\vec{q}$$

が従います. これが任意の $\vec{q} \in \mathbb{R}^2$ に対して成立するので

$${}^t(XY) = {}^tY\,{}^tX$$

となります.

<u>応用</u>　$A \in M_2(\mathbb{R})$ が正則のとき ${}^tA$ も正則で

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

A が正則なので

$$AX = XA = I_2$$

を満たす $X \in \mathbb{R}^2$ が存在します. この両辺を転置すると

$${}^tX\,{}^tA = {}^tA\,{}^tX = {}^tI_2 = I_2$$

となります. これは ${}^tA$ が正則で

$$({}^tA)^{-1} = {}^tX = {}^t(A^{-1})$$

を意味します.