L06-0518T06の小テスト 問題III

$$(\#)\quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

に非自明解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (\in \mathbb{R}^3) \neq \vec{0}$ が存在することを示しましょう。

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,\ = 0$ で場合分けをします。

III (1) (#) に $z=1$ を代入した $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = -c_1 \\ a_2 x + b_2 y = -c_2 \end{cases}$ をクラメールで解くと

$$x = x_0 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad y = y_0 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

となります ($D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ とおきます)。このとき $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

が(#)の解です。

(2) $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ ならば $x = x_1,\ y = y_1$ で $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ をみたす

解が $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{cases}$

に存在します。このとき $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が(#)の

非自明解となります。

補充問題Ⅲは $\vec{p}_1=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$, $\vec{p}_2=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$ に対して $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$, $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$ で場合分けをします。

Ⅲ (1) (i) $a_1=0$ のとき $0\cdot 1+b_1\cdot 0+c_1\cdot 0=0$ から $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ は解

(ii) $a_1\neq 0$ のとき. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b_1\\a_1\\0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ は解.

(2) $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$ のとき $\vec{p}_2=\lambda\vec{p}_1$ または $\vec{p}_1=\lambda\vec{p}_2$ を満たす $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在します. 前者のときを考えます. $\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$ が成立するので (#)の係数行列は

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1\end{pmatrix}\xrightarrow[2行+1行\times(-\lambda)]{}\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

から

$$(\#)\iff a_1x+b_1y+c_1z=0$$

となり (1)から (#)に非自明解が存在することが分かります.

$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$ のとき $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ or $\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}\neq 0$ or $\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}\neq 0$ となります. $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ のとき クラメールから

$$x=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-c_1z & b_1\\-c_2z & b_2\end{vmatrix},\quad y=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}a_1 & -c_1z\\a_2 & -c_2z\end{vmatrix}$$

が z を固定した時の解です. $z=1$ とすると 非自明解

$$x=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\-c_2 & b_2\end{vmatrix},\quad y=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix},\quad z=1$$

が存在することが分かります.

T05 Ⅲ に関する補足

(別の証明)

第1段　$ax + by = 0$ には非自明な解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在.

第2段　$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 & (1) \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 & (2) \end{cases}$ の係数行列

$X = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ を考える.

(i) $\vec{a} = \vec{0}$ のとき　$1 \cdot \vec{0} + 0\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{0}$ から ok.

(ii) $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき. $a_1 \neq 0$ とする. ($a_2 \neq 0$ のときも同様)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \times \frac{1}{a_1}} \begin{pmatrix} 1 & *_2 & *_3 \\ a_2 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r + 1r \times (-a_2)} \begin{pmatrix} 1 & *_2 & *_3 \\ 0 & \#_2 & \#_3 \end{pmatrix}$$

第1段により　$\#_2 y_0 + \#_3 z_0 = 0$ を満たす $\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在する. $x_0 := -*_2 y_0 - *_3 z_0$ とすると $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ で (1) かつ (2) を満たす.　(以上)

注　L05の補充問題の解答も参考にして下さい.

次の応用　$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ は線型従属である.

(i) $\vec{a} = \vec{0}$ のとき.　$1 \cdot \vec{0} + 0\vec{b} + 0 \cdot \vec{c} + 0 \cdot \vec{d} = \vec{0}$ から ok.

(ii) $\vec{a} \neq \vec{0}$ 特に $a_1 \neq 0$ のとき ($a_2 \neq 0$ or $a_3 \neq 0$ のときも同様)

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ a_2 & * & \\ a_3 & & \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \times \frac{1}{a_1}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ a_2 & * & \\ a_3 & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

ある $\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して　$\begin{cases} \beta_2 y_0 + \gamma_2 z_0 + \delta_2 w_0 = 0 \\ \beta_3 y_0 + \gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0 = 0 \end{cases}$

$x_0 := -\beta_1 y_0 - \beta_2 z_0 - \beta_3 w_0$ とおくと　$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ は

$x_0 \vec{a} + y_0 \vec{b} + z_0 \vec{c} + w_0 \vec{d} = \vec{0}$

を満たす.

明らかとなる.

L05T02, L05T04, L04T05 の問題で $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \in \mathbb{R}^3$ は LD なのは

別の証明

定理
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が LI $\Longrightarrow$ $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と行基本変形できる

ことを用います。

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ が LI とすると $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は LI です。従って

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できます。

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + w\vec{d} = \vec{0} \quad (*)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\delta_1 \cdot w \\ y = -\delta_2 w \\ z = -\delta_3 w \end{cases}$$

から $w = 1$ として $\begin{pmatrix} -\delta_1 \\ -\delta_2 \\ -\delta_3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が $(*)$ の非自明解となります。

従って $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ が LI であることに反します。

注　最初の問題は上の定理の証明のプロセスで示される

$\vec{a} \nparallel \vec{b} \Longrightarrow \left((\vec{a}\ \vec{b}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ と行基本変形できる} \right)$

ことからも示せます。