定理1の拡張

$\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ かつ

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#)$$

(証明1) $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ とすると (#) は

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\$)$$

と同値である.

(i) $|A| = 0$ のとき. $\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

である. このとき.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

で $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ となる.

(ii) $|A| \neq 0$ のとき. A の逆行列が存在するので

$$(\$) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -wA^{-1} \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{pmatrix} \qquad (\%)$$

となる. $w = 1$ として (%) で $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を定めると $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ となる.

（証明 2）(i) $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \vec{0}$ のとき　$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$　②

で $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

(ii) $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ のとき.

(ii-1) $a_1 \neq 0$ のとき.

$$(\#) \iff \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 & b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3 & b_4 - \frac{b_1}{a_1} a_4 \\ 0 & c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 & c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 & c_4 - \frac{c_1}{a_1} a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 & b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3 & b_4 - \frac{b_1}{a_1} a_4 \\ c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 & c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 & c_4 - \frac{c_1}{a_1} a_4 \end{matrix}}_{= B \text{ とする.}}$$

このとき.

$$(\#) \iff \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 w = 0 \\ B \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0}. \end{cases}$$

定理1から $\exists \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} \neq \vec{0}$　$B \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0}$.

さらに　$x = -\frac{1}{a_1}(a_2 y + a_3 z + a_4 w)$ と定めると.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が (#) を満たす.

問題　A : m行n列 で $m < n$ ならば $\exists \vec{v} \neq \vec{0}$　$A\vec{v} = \vec{0}$

が成立することを示せ.

定理4. EXT $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \text{ は LD.}$$

応用. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{K}^n$ に対して

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ が LI

$$\Rightarrow \quad L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

(証明)

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \subset L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

となる. (各自これを示せ) もし

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \subsetneqq L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

ならば $\exists \vec{r}_4 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ が

$$\vec{r}_4 \notin L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$$

となる.

$$c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2 + c_3 \vec{r}_3 + c_4 \vec{r}_4 = \vec{0} \qquad (*)$$

とすると $c_4 = 0$ となる (何故か? 考えよう). $(*)$ に $c_4 = 0$ を代入すると

$$c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2 + c_3 \vec{r}_3 = \vec{0}$$

から $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となるので $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ は LI. これは有り得ない (定理4 EXT)

④

問　このとき、$\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ が L.I. となる。これを示せ。