定理2の応用

定理2　$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m, \vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell \in \mathbb{K}^n$ とします.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell \text{ が LI} \\ \vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell \in L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m) \end{array}\right\} \Longrightarrow \ell \leq m.$$

系　$V, W \ (\subset \mathbb{K}^n)$ が部分空間とします.

(1)　$V \subset W \Longrightarrow \dim V \leq \dim W$

(2)　$V \subset W$ かつ $\dim V = \dim W \Longrightarrow V = W$.

(1) V の基底を $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell$, W の基底を $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ とします。

このとき $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell$ はLI, $\vec{q}_j \in V \subset W = L(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m)$ によって、

となります。定理2から $\ell \leq m$ 従って $\dim V \leq \dim W$.

(2) $\dim V = \dim W = m$ とします。V の基底を $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$, W の基底を $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$

とします。$V \subsetneq W$ とします。このとき $\exists \vec{q}_{m+1} \in W$, $\vec{q}_{m+1} \notin V$

$$c_1 \vec{q}_1 + \cdots + c_m \vec{q}_m + c_{m+1} \vec{q}_{m+1} = \vec{0} \quad ⊛$$

とします。$c_{m+1} \neq 0$ とすると $\vec{q}_{m+1} = -\frac{1}{c_{m+1}} (c_1 \vec{q}_1 + \cdots + c_m \vec{q}_m) \in V$ となり

矛盾します。よって $c_{m+1} = 0$ よって ⊛ に代入して

$$c_1 \vec{q}_1 + \cdots + c_m \vec{q}_m = \vec{0}$$

となり $c_1 = \cdots = c_m = 0$ が従います。以上で $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{q}_{m+1} \in W$ は

LI となりますが定理2から $m+1 \leq m$ となり矛盾します。