第 4 章追加演習問題

I (1)

$$ {}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1} $$

を示しましょう.

(2) (1) を用いて $B \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$ (I+B)^n = I + {}_nC_1 B + {}_nC_2 B^2 + \cdots + {}_nC_k B^k + \cdots + B^n $$

が成立することを示しましょう.

解答 (1)

$$ \begin{aligned} RHS &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!\{(n-k+1)+k\}}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!\{(n+1)-k\}!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!\{(n+1)-k\}!} = {}_{n+1}C_k \end{aligned} $$

注意　$1, 2, \ldots, n, n+1$ の番号が書いてる $n+1$ 個のボールから k 個選ぶ組み合わせの数は

$$ \begin{aligned} (n+1)\text{を含む場合}{}_nC_{k-1}\text{通り} \\ (n+1)\text{を含まない場合}{}_nC_k\text{通り} \end{aligned} $$

に場合分けできて，両方に属する場合がないことから分かります.

(2) n に関する帰納法で示します. $n=1$ の場合は明らかです. n の場合が成立するとします.

$$ \begin{array}{rrcccccccccccc} & I_2(I_2+B)^n & = & I_2 & + & {}_nC_1B & + & {}_nC_2B^2 & +\ldots+ & {}_nC_kB^k & +\ldots+ & B^n & & \\ +) & B(I_2+B)^n & = & & & B & + & {}_nC_1B^2 & +\ldots+ & {}_nC_{k-1}B^k & +\ldots+ & {}_nC_{n-1}B^n & + & B^{n+1} \\ \hline & (I_2+B)^{n+1} & = & I_2 & + & {}_{n+1}C_1B & + & {}_{n+1}C_2B^2 & +\ldots+ & {}_{n+1}C_kB^k & +\ldots+ & {}_{n+1}C_nB^n & + & B^{n+1} \end{array} $$

II $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して A^n を求めましょう。

解答 帰納法でも証明できますが，ここでは問題 **I** を用います. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $J^2 = O_2$ となりますから

$A^n = (I_2+aJ)^n = I_2 + {}_nC_1 aJ + \ldots + {}_nC_k a^k J^k + \ldots + a^n J^n = I_2 + naJ = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となります.

III $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ とします．
(1) A が正則ならば A^{-1} も正則であることを示しましょう．
(2) A, B が正則ならば積 AB も正則であることを示しましょう．

解答 (1)

$$A^{-1}A = A^{-1}A = I_n$$

から A は正則で $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ であることが分かります．
(2)

$$AB \cdot (B^{-1}A) = A(B^{-1}B)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

から AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ であることが分かります．

IV
$A \in M_2(\mathbf{K})$ とします．任意の $X \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$AX = XA \tag{4.19}$$

を満たす A をすべて求めましょう．

解答 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表します．$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき

$$AX = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから，$XA = AX$ から $b = c = 0$ であることが従います．
　以下 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ となりますが，$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & d \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

となります．$AX = XA$ から $a = d$ が従います．よって $A = aI_2$ と表されることが分かります．このとき

$$AX = (aI_2)X = a(I_2X) = aX, \quad XA = X(aI_2) = a(XI_2) = aX$$

から任意の $X \in M_2(\mathbf{K})$ に対して $AX = XA$ が成立することが分かります．