3.5　3 次の行列式（補足）

3.5.1　列に関する基本性質

この余因子展開を用いると行列式の列に関する基本的な性質をいくつか導くことができます.

(I) (各列に関する線型性) 例えば 1 列に関して

$$\begin{vmatrix} \lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{\alpha} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

が成立します.

この性質は 2 次正方行列の性質と同様に証明できます．そのためには次の補助定理 3.1 を用います.

補助定理 3.1. $F:\ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}\quad \vec{x} \mapsto a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ は

$$F(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

を満たします.

演習 3.4. 補助定理 *3.1* を証明して，(3.19) を示しましょう.

(II) (交代性) 相異なる 2 列を交換すると行列式の値は (-1) 倍されます．例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \tag{3.20}$$

が成立します.

2 次正方行列に対する行列式の交代性を用いて，(3.20) を証明します．実際

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} &= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= -c_1\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - c_3\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と証明されます.

最後に次の性質 **(III)** は具体的に計算すれば示せます.

(III) (正規性) 単位行列 I_3 の行列式は

$$|I_3| = 1$$

となります.

基本性質から導かれる性質　以上の (I)，(II)，(III) が行列式の基本的な性質です．これからいくつかの性質を導くことができます.

(IV) 異なる 2 列が等しいとき行列式の値は 0 となります．例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.21}$$

が成立します.

この場合は 1 列と 2 列を交換すると性質 **(II)** から

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

が得られることから，(3.21) が従います.

(V) $i \neq j$ のとき j 列に i 列の λ 倍を加えても行列式の値は変わりません．例えば

$$|\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ | = |\ \vec{a} \quad (\vec{b} + \lambda\vec{a}) \quad \vec{c}\ |$$

が成立します.

これは

$$(\text{右辺}) = |\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ | + \lambda|\ \vec{a} \quad \vec{a} \quad \vec{c}\ | = |\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ |$$

から従います.

3.5.2 行の基本性質

3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の転置行列の行列式

$$\det({}^tA) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

を考えます．具体的に計算すると

$$\det({}^t A) = \det(A) \quad \text{すなわち} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

を得ます．以上で次の定理 3.7 を示しました．

定理 3.7. $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

$$\det({}^t A) = \det(A) \tag{3.22}$$

が成立します．

これを用いると行に関する余因子展開を導くことができます．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

とすると以下が示せます．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

定理 3.7 を用いると，列に関して今まで説明した性質が行の性質についても成立することを示せます．すなわち以下の性質が成立します．

(I)（行に関する線型性） 行列式は各行において線型です．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

が2行の線型性として成立します．

これは転置をしても行列式の値が変わらないことと列に関する線型性を用いると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & \lambda{}^t\boldsymbol{x}+\mu{}^t\boldsymbol{y} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{x} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{y} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と証明できます．

(II)（交代性） 相異なる2行を交換すると行列式の値は (-1) 倍されます．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

が成立します．

これは転置をしても行列式の値が変わらないことと列に関する交代性を用いると

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{b} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{c} & {}^t\boldsymbol{b} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

と証明されます．

以上で説明した行に関する性質 **(I)** と **(II)** を用いると次の性質 **(IV)** と性質 **(II)'**，性質 **(V)** が従います．これらは，列に関する同様の性質を導いたのと同様に示すことができます．

(IV) 相異なる2行が等しい行列式の値は0です．

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = 0$$

(V) $i \neq j$ のとき i 行の λ 倍を j 行に加えても行列式の値は変わりません．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

が成立します.

行列式の具体的な計算方法として，行に関する性質 **(V)** と性質 **(II)** を用いて 1 列の成分が 1 行以外 0 となるように行基本変形するやり方があります．これは定理 3.7 の証明の中でも使ったアイデアですが，加えて余因子展開を用いると 2 次の行列式を計算することに持ち込むことができます．例えば

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2(2\cdot 6 - 2\cdot 3) = -12$$

と計算されます．最後に 3 次から 2 次になっているところは 1 列の余因子展開を用いました.

演習 3.5. 次の行列式の値を求めましょう.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　*(2)* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$　*(3)* $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$　*(4)* $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

3.5.3　クラメールの公式

次に x, y, z に関する 3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= \alpha_1 \qquad \cdots(1) \\ a_2x + b_2y + c_2z &= \alpha_2 \qquad \cdots(2) \\ a_3x + b_3y + c_3z &= \alpha_3 \qquad \cdots(3) \end{cases}$$

を考えます．2 元連立方程式に帰着させるために，z を消去します．そのために $(1)\times c_2 - (2)\times c_1$ を考えると

$$\begin{array}{rlll} & a_1c_2x + b_1c_2y & = \alpha_1c_2 & \cdots(1)\times c_2 \\ -) & a_2c_1x + b_2c_1y & = \alpha_2c_1 & \cdots(2)\times c_1 \\ \hline & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y & = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} & \cdots(\mathrm{I}) = (1)\times c_2 - (2)\times c_1 \end{array}$$

を得ます．同様に $(1)\times c_2 - (3)\times c_1$ と $(2)\times c_3 - (3)\times c_2$ を考えると

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots(\mathrm{II}) = (1)\times c_3 - (3)\times c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots \text{(III)} = (2) \times c_3 - (3) \times c_2$$

を得ることができます.

$-b_1 \times \text{(III)} + b_2 \times \text{(II)} - b_3 \times \text{(I)}$ を2列の余因子展開を用いて計算すると

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.23}$$

より

$$Dx = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \left(\text{ただし} D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)$$

が得られます．したがって $D \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

が得られました．y と z についても同様な解の公式があり，次の定理3.8が証明できます.

定理 3.8.（クラメールの公式） $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき連立1次方程式 *(1),(2),(3)* の解は

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

で与えられます.

演習 3.6. $a_1 \times \mathit{(III)} - a_2 \times \mathit{(II)} + a_3 \times \mathit{(I)}$ を計算して定理 *3.8* の y の公式を導いてください.

演習 3.7. 次の連立1次方程式をクラメーの公式を用いて解きましょう.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.5.4　クラメールの公式 (2)

列の余因子展開　$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して余因子展開

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

が成立します．$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ と (i, j) 成分を a_{ij} と表すと

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となります．ここで A から i 行と j 列を除いた 2 次正方行列を A_{ij} として，さらに (i, j) 余因子を

$$\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

と定めます．このとき上の余因子展開は

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\tilde{A}_{11} + a_{21}\tilde{A}_{21} + a_{31}\tilde{A}_{31} \\ &= a_{12}\tilde{A}_{12} + a_{22}\tilde{A}_{22} + a_{32}\tilde{A}_{32} \\ &= a_{13}\tilde{A}_{13} + a_{23}\tilde{A}_{23} + a_{33}\tilde{A}_{33} \end{aligned}$$

と表すことができます．これを $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ すなわち A の各列を用いて表すと

$$\begin{aligned}|A| &= (\tilde{A}_{11}\ \tilde{A}_{21}\ \tilde{A}_{31})\vec{a}_1 \\ &= (\tilde{A}_{12}\ \tilde{A}_{22}\ \tilde{A}_{32})\vec{a}_2 \\ &= (\tilde{A}_{13}\ \tilde{A}_{23}\ \tilde{A}_{33})\vec{a}_3\end{aligned}$$

となります．ここで A の余因子行列を

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{pmatrix}$$

と定義すると

$$\tilde{A}A = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{pmatrix} (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} |A| & * & * \\ * & |A| & * \\ * & * & |A| \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

であることが分かります．この式の最右辺にある $*$ の成分は 0 となります．例えば A の第 1 列を第 2 列に置き換えて第 1 列で余因子展開すると

$$\begin{aligned}0 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{12}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{12}\tilde{A}_{11} + a_{22}\tilde{A}_{21} + a_{32}\tilde{A}_{31} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \end{pmatrix} \vec{a}_2\end{aligned}$$

から $\tilde{A}A$ の $(1,2)$ 成分の $*$ が 0 となることが示せます．以上で次の定理を示しました．

定理 3.9.

$$\tilde{A}A = |A| \cdot I_3$$

行の余因子展開　$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ の行列式は $|A| = |{}^tA|$ が成立することを用いて

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

この式では転置行列の第 1 列で展開しましたが，同様に転置行列の第 2 列，第 3 列で展開すると

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

と各行の余因子展開が成立することが分かります．各列の余因子展開を A の (i,j) 成分 $A=(a_{ij})$ と余因子 $\tilde{A}_{ij}$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\tilde{A}_{11} + a_{12}\tilde{A}_{12} + a_{13}\tilde{A}_{13} \\
&= a_{21}\tilde{A}_{21} + a_{22}\tilde{A}_{22} + a_{23}\tilde{A}_{23} \\
&= a_{31}\tilde{A}_{31} + a_{32}\tilde{A}_{32} + a_{33}\tilde{A}_{33}
\end{aligned}
$$

できます．これを $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ と A の各行を用いて表すと

$$
|A| = \mathbf{a}_1 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} \\ \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{13} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_2 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{22} \\ \tilde{A}_{23} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_3 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{33} \end{pmatrix}
$$

と表現できます．これから

$$
A\tilde{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & * & * \\ * & |A| & * \\ * & * & |A| \end{pmatrix}
$$

となります．この式の最右辺の非対角成分は 0 となります．例えば A の第 2 行を第 3 行に置き換えた行列の行列式を第 2 行で展開すると

$$
\begin{aligned}
0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= -a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{31}\tilde{A}_{21} + a_{32}\tilde{A}_{22} + a_{33}\tilde{A}_{23} \\
&= \mathbf{a}_3 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{22} \\ \tilde{A}_{23} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

から $(3,2)$ 成分の $*$ が 0 であることが分かります.
　以上で次の定理を示しました.

定理 3.10.
$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_3$$

この定理を用いると次の定理を示すことができます.

定理 3.11.　$|A| \neq 0$ ならば A は正則で
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$
となります.

3.5.5　行列の積と行列式