

追加演習問題および解答

I (教科書 26p. 演習 1.29 の拡張)

次の $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$L = \{x\vec{a} + y\vec{b}; x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます. 条件

$$\|\vec{p}\| = \|\vec{q}\| = 1, (\vec{p}, \vec{q}) = 0$$

を満たす $\vec{p}, \vec{q} \in L$ を求めましょう.

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{(2)} \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{(3)} \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{(4)} \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

解答 (1) \vec{b} の \vec{a} 方向への直交射影 \vec{w} は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = \frac{2}{3} \vec{a}$$

と求められます. このとき \vec{a} の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

が求まります. このとき \vec{a} と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} (\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

(2) \vec{b} の \vec{a} 方向への直交射影 \vec{w} は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = \frac{1}{2} \vec{a}$$

と求められます. このとき \vec{a} の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まります. このとき \vec{a} と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} (\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

(3) \vec{b} の \vec{a} 方向への直交射影 \vec{w} は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = -\frac{1}{4} \vec{a}$$

と求められます. このとき \vec{a} の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まります. このとき \vec{a} と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} (\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

(4) \vec{b} の \vec{a} 方向への直交射影 \vec{w} は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = \frac{2}{4} \vec{a} = \frac{1}{2} \vec{a}$$

と求められます. このとき \vec{a} の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まります. このとき \vec{a} と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} (\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

II (Iの続き) Iの \vec{p}, \vec{q} を用いて

$$\|\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}\|^2$$

を最小にする $x, y \in \mathbf{R}$ を求めましょう.

$$(1) \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3) \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4) \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解答 \vec{p}, \vec{q} と \vec{a}, \vec{b} の間に関係

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$$

$$\vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} \left(\vec{b} - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \right)$$

があることに注意しましょう. 従って

$$(\vec{p} \ \vec{q}) = (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\vec{a}\|} & -\frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} \cdot \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \\ 0 & \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} \end{pmatrix}$$

が成立します. この等式の右辺に現れる行列を S とすると S は正則となります.

$$\begin{aligned} \xi \vec{p} + \eta \vec{q} &= (\vec{p} \ \vec{q}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\vec{a} \ \vec{b}) S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成立します. 以上から任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して一意的に $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ が存在して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}$$

が成立します. 以下ではこのことを用います. すなわち

$$\begin{aligned} \|\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}\|^2 &= \|\vec{c} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}\|^2 \\ &= \|\vec{c}\|^2 + \xi^2\|\vec{p}\|^2 + \eta^2\|\vec{q}\|^2 - 2\xi(\vec{c}, \vec{p}) - 2\eta(\vec{c}, \vec{q}) \\ &= \|\vec{c}\|^2 + \xi^2 - 2\xi(\vec{c}, \vec{p}) + \eta^2\|\vec{q}\|^2 - 2\eta(\vec{c}, \vec{q}) \\ &= (\xi - (\vec{c}, \vec{p}))^2 + (\eta - (\vec{c}, \vec{q}))^2 + \|\vec{c}\|^2 - (\vec{c}, \vec{p})^2 - (\vec{c}, \vec{q})^2 \end{aligned}$$

から

$$\xi = (\vec{c}, \vec{p}), \quad \eta = (\vec{c}, \vec{q})$$

のとき $\|\vec{x} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}\|^2$ は最小となります.

(1)

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

であることがIで示されています. これから

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) = -\frac{5}{\sqrt{42}}$$

のとき最小値をとることが分かります. このとき

$$\begin{aligned} x\vec{a} + y\vec{b} &= \xi\vec{p} + \eta\vec{q} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{\sqrt{42}} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 1 & 1 & \frac{3}{14} \\ 1 & -1 & -\frac{13}{14} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 0 & -1 & \frac{5}{14} \\ 0 & -3 & \frac{15}{14} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} \\ 0 & -3 & \frac{15}{14} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{8}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

から

$$x = \frac{4}{7}, \quad y = -\frac{5}{14}$$

であることが分かります.

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{42}} \cdot \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{42}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{\sqrt{42}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{5}{14} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

(2)

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であることがIで示されています. これから

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

のとき最小値をとることが分かります. このとき

$$\begin{aligned} x\vec{a} + y\vec{b} &= \xi\vec{p} + \eta\vec{q} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 2 & \frac{6}{17} \\ -1 & 1 & \frac{13}{17} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 2 & \frac{6}{17} \\ 0 & 3 & \frac{9}{17} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 1 & \frac{3}{17} \\ 0 & 3 & \frac{9}{17} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{10}{17} \\ 0 & 1 & \frac{3}{17} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

から

$$x = -\frac{10}{17}, \quad y = \frac{3}{17}$$

であることが分かります.

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{34}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{34}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{17} \\ \frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

(3)

$$\vec{p} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であることがIで示されています。これから

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}, \quad \eta = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{5}{\sqrt{44}}$$

のとき最小値をとることが分かります。このとき

$$\begin{aligned} x\vec{a} + y\vec{b} &= \xi\vec{p} + \eta\vec{q} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{44}} \cdot \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{9}{11} \\ 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{11} \\ -1 & 1 & \frac{1}{11} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 0 & -1 & -\frac{5}{11} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

から

$$x = \frac{4}{11}, \quad y = \frac{5}{11}$$

であることが分かります。

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{4}{\sqrt{44}} \cdot (-\frac{1}{4}) \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{44}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{44}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます。

(4)

$$\vec{p} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であることがIで示されています。これから

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{2}, \quad \eta = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{3}{\sqrt{20}}$$

のとき最小値をとることが分かります。このとき

$$\begin{aligned} x\vec{a} + y\vec{b} &= \xi\vec{p} + \eta\vec{q} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{20}} \cdot \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 1 & 2 & \frac{2}{10} \\ -1 & 1 & \frac{7}{10} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 0 & 2 & \frac{6}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

から

$$x = -\frac{4}{10}, \quad y = \frac{3}{10}$$

であることが分かります。

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{\sqrt{20}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます。

III $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が平行でないとします。このとき

$$\vec{x} \nparallel \lambda\vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{x} + \vec{y} \nparallel \vec{x} - \vec{y}$$

であることを示しましょう。

解答

$$c_1\vec{x} + c_2(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = (c_1 + \lambda c_2)\vec{x} + c_2\vec{y} = \vec{0}$$

とします. このとき $\vec{x} \parallel \vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 + \lambda c_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

が従います. ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

に注意すると $c_1 = c_2 = 0$ が従います. 従って

$$\vec{x} \parallel \lambda \vec{x} + \vec{y}$$

であることが分かります. 他方

$$c_1(\vec{x} + \vec{y}) + c_2(\vec{x} - \vec{y}) = (c_1 + c_2)\vec{x} + (c_1 - c_2)\vec{y} = \vec{0}$$

とします. このとき $\vec{x} \parallel \vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

が従います. ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

に注意すると $c_1 = c_2 = 0$ が従います. 従って

$$\vec{x} + \vec{y} \parallel \vec{x} - \vec{y}$$

であることが分かります.

IV $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ は平行でないとします:

$$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$$

このとき

$$\vec{\alpha} = x\vec{a} + y\vec{b}, \quad \vec{\beta} = z\vec{a} + w\vec{b}$$

とするとき

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} \neq 0$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$\begin{aligned} c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} &= c_1(x\vec{a} + y\vec{b}) + c_2(z\vec{a} + w\vec{b}) \\ &= (xc_1 + zc_2)\vec{a} + (yc_1 + wc_2)\vec{b} = \vec{0} \end{aligned}$$

とします. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\begin{cases} xc_1 + zc_2 = 0 \\ yc_1 + wc_2 = 0 \end{cases} \quad (\#)$$

が従います.

ここで $\begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} \neq 0$ ならば (#) から $c_1 = c_2 = 0$ が導けますから

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}$$

が従います. 他方

$$\begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} = 0$$

ならば (#) を満たす $c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ で $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ を満たすものが存在して

$$c_1\vec{a} + c_2\vec{b} = \vec{0}$$

が成立します. これは

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

を意味します.