III 次の曲面の P_0 における接平面を求めましょう．</dd>

(1)

$$g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 17 = 0 \quad \text{at } \mathrm{P}_0(2,-1,1)$$

(2)

$$g(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + 9z^2 - 1 = 0 \quad \text{at } \mathrm{P}_0(1,1,-\frac{2}{3})$$

(3)

$$g(x,y,z) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{4}} - 1 = 0 \quad \text{at } \mathrm{P}_0(1,1,1)$$

解答 (1)

$$g_x = 2x,\ g_y = 8y,\ g_x = 18z$$

なので

$$g_x(\mathrm{P}_0) = 4,\ g_y(\mathrm{P}_0) = -8,\ g_x(\mathrm{P}_0) = 18$$

となります．従って接線の方程式は

$$4(x-2) - 8(y+1) + 18(z-1) = 0$$

(2)

$$g_x = 2x,\ g_y = -8y,\ g_x = 18z$$

なので

$$g_x(\mathrm{P}_0) = 2,\ g_y(\mathrm{P}_0) = -8,\ g_x(\mathrm{P}_0) = -12$$

となります．従って接線の方程式は

$$2(x-1) - 8(y-1) - 12(z-\frac{2}{3}) = 0$$

(3)

$$g_x = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{4}},\ g_y = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{4}},\ g_z = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{3}{4}}$$

なので

$$g_x(\mathrm{P}_0) = \frac{1}{2},\ g_y(\mathrm{P}_0) = \frac{1}{3},\ g_x(\mathrm{P}_0) = \frac{1}{4}$$

となります．従って接線の方程式は

$$\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) + \frac{1}{4}(z-1) = 0$$

I (x,y,z) が

$$\begin{cases} x-2y+z+1 &= 0 \\ x+y-z-2 &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

を動くとき

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

の極値を求めましょう．可能ならば最小値を求めましょう．

解答 制約条件 (1) を x,y について解くと

$$\begin{cases} x-2y &= -z-1 \\ x+y &= z+2 \end{cases}$$

から

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -z-1 & -2 \\ z+2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{1}{3}\{(-z-1)+2(z+2)\} = \frac{1}{3}(z+3) \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z-1 \\ 1 & z+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{1}{3}\{(z+2)+(z+1)\} = \frac{1}{3}(2z+3) \end{aligned}$$

となるので，制約条件は直線で

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} z+3 \\ 2z+3 \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示されます．直線上の点 (x,y,z) に対して

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる条件は

$$1\cdot(z+3)+2(2z+3)+3\cdot 3z=0$$

となります．これを解いて $z=-\frac{14}{9}$ となりますから条件を満たす点は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{3}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

となります．従って最小値は

$$\frac{1}{14^2}\left(11^2+8^2+9^2\right)=\frac{133}{113}$$

であることが分かります．

II 以下の制約条件付き極値問題を考えます．停留点を求めましょう．

(1)

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) &= y^2+z^2-1 &= 0 \\ g_2(x,y,z) &= xz-3 &= 0 \end{cases}$$

の下で $w=f(x,y,z)=yz+zx$

(2)

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) &= 3x+y+z-5 &= 0 \\ g_2(x,y,z) &= x+y+z-1 &= 0 \end{cases}$$

の下で $w=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

(3)

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-1 &= 0 \\ g_2(x,y,z) &= y &= 0 \end{cases}$$

の下で $w=f(x,y,z)=x+y+z^2$

解答 (1)

$$\nabla(g_1)=\begin{pmatrix}0\\2y\\2z\end{pmatrix},\quad \nabla(g_2)=\begin{pmatrix}z\\0\\x\end{pmatrix},\quad \nabla(f)=\begin{pmatrix}z\\z\\x+y\end{pmatrix}$$

と計算されます．(x,y,z) で極大または極小であるとすると

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}z\\z\\x+y\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\2y\\2z\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}z\\0\\x\end{pmatrix} &= \vec{0} &\ldots\ldots(1) \\ y^2+z^2-1 &= 0 &\ldots\ldots(2) \\ xz-3 &= 0 &\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ が存在します．(1) の第 1 成分から

$$z(1+\mu)=0$$

が成立しますが，(3) から $z\neq 0$ が分かりますから $\mu=-1$ が必要であることが従います．このとき (1) の第 2, 第 3 成分から

$$\begin{cases} z+2\lambda y &= 0 &\ldots\ldots(4) \\ y+2\lambda z &= 0 &\ldots\ldots(5) \end{cases}$$

が分かります．(4)+(5) から

$(y+z)(2\lambda+1)=0$　すなわち　$y+z=0$　OR　$2\lambda+1$

となります．

(i) $\underline{y+z=0\text{ のとき}}$(2) から

$$(y,z)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2})$$

となります．このときさらに (3) から $x=\pm3\sqrt{2}$ となります．未定乗数 λ は (4) から $\lambda=\frac{1}{2}$ であることが分かります．以上でこの場合，停留点は

$$(x,y,z,\lambda,\mu)=(\mp3\sqrt{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-1)$$

（復号同順）

であることが分かります．

(ii) $\underline{2\lambda+1=0\text{ のとき}}\lambda=-\frac{1}{2}$ となります．このとき (1) の第 2 成分から $y=z$ となります．(2) から

$$(y,z)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$$

であることが従います．さらに (3) から $x=\pm3\sqrt{2}$ を得ます．以上でこの場合，停留点は

$$(x,y,z,\lambda,\mu)=(\pm3\sqrt{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2},-1)$$

（復号同順）

であることが分かります．

(2)

$$\nabla(g_1)=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},\quad \nabla(g_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \nabla(f)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$$

と計算されます．(x,y,z) で極大または極小であるとすると

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & = \vec{0} \quad \ldots\ldots(1) \\ 3x+y+z-5 & = 0 \quad \ldots\ldots(2) \\ x+y+z-1 & = 0 \quad \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ が存在します．(1) を

$$\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \vec{0}$$

と考えると $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0}$ から

$$0 = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(z-y) \ldots\ldots(4)$$

が従います．(4) を (2),(3) に代入すると

$$\begin{cases} 3x+2y & = 5 \\ x+2y & = 1 \end{cases}$$

を得ますが，これを解くと $x=2, y=-\frac{1}{2}$ となります．そして $z=y=-\frac{1}{2}$ となります．(1) の第 1 成分，第 2 成分に代入して

$$\begin{cases} 4+3\lambda+\mu & = 0 \\ -1+\lambda+\mu & = 0 \end{cases}$$

となりますが，これから $\lambda=-\frac{5}{2}, \mu=\frac{7}{2}$ となります．以上で停留点は

$$(x,y,z,\lambda,\mu) = (2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$$

となります．

(3)

$$\nabla(g_1) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla(g_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2z \end{pmatrix}$$

と計算されます．(x,y,z) で極大または極小であるとすると

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & = \vec{0} \quad \ldots\ldots(1) \\ x^2+y^2+z^2-1 & = 0 \quad \ldots\ldots(2) \\ y & = 0 \quad \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ が存在します．(1) の第 1 成分に (3) の $y=0$ を代入すると

$$1+\mu=0 \quad 従って \mu=-1$$

が必要であることが分かります．このとき (1) の第 2 成分から

$$z(\lambda+1)=0 \quad すなわち \quad z=0 \quad または \quad \lambda=-1$$

であることが分かります．

(i) $z=0$ のとき(2) に $y=z=0$ を代入すると $x=\pm 1$ となります．このとき (1) の第 1 成分から

$$\lambda = \mp\frac{1}{2}$$

となります．以上でこの場合，停留点は

$$(x,y,z,\lambda,\mu) = (\pm 1, 0, 0, \mp\frac{1}{2}, -1) \quad （復号同順）$$

であることが分かります．

(ii) $\lambda=-1$ のとき (1) の第 1 成分から $x=\frac{1}{2}$ となります．このとき (2) に代入すると $z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ となります．以上でこの場合，停留点は

$$(x,y,z,\lambda,\mu) = (\frac{1}{2}, 0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -1) \quad （復号同順）$$

であることが分かります．

III 以下の曲線の P_0 における接線の方向ベクトルを求めましょう．

(1)

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) &=& x^2+y^2+z^2 &=& 0 \\ g_2(x,y,z) &=& x-y+2z &=& 0 \end{cases}$$

at $\mathrm{P}_0(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

(2)

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) &=& x^2-y^2-z^2-1 &=& 0 \\ g_2(x,y,z) &=& x+y+z &=& 0 \end{cases}$$

at $\mathrm{P}_0(\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

解答 (1)

$$\nabla(g_1) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad \nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \nabla(g_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である．P_0 における接線方向を $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とすると

$$\left(\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}(p-q-r) \qquad = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$\left(\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\right) = p-q+2r \qquad = 0 \ldots\ldots (2)$$

が成立します．従って (1) かつ (2) すなわち

$$\begin{cases} p-q-r &=& 0 \ldots\ldots (1)' \\ p-q+2r &=& 0 \ldots\ldots (2)' \end{cases}$$

を解くと $r=0,\ p=q$ となりますから

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ q \\ 0 \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が接線方向です．

(2)

$$\nabla(g_1) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad \nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \nabla(g_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．P_0 における接線方向を $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とすると

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\right) &= \frac{2}{\sqrt{2}}(2p - q - r) && = 0 \ldots\ldots (1) \\
\left(\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\right) &= p + q + r && = 0 \ldots\ldots (2)
\end{aligned}
$$

が成立します．従って (1) かつ (2) すなわち

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} 2p - q - r & = & 0 \ldots\ldots (1)' \\ p + q + r & = & 0 \ldots\ldots (2)' \end{array} \right.
$$

を解くと $p = 0,\ q = -r$ となりますから

$$
\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

が接線方向です.