

第 1 講義 05 月 04 日 演習問題解答

I 以下の関数の停留点を求めましょう.

- (1)  $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$  (2)  $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$   
 (3)  $z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$  (4)  $z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$   
 (5)  $z = x^3 - xy - y^2$

(1)

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 4 = 0 \\ z_y = x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式を使って解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{3} = 4$$

となりますから,  $(x, y) = (0, 4)$  が  $z$  の停留点であることが分かります.

(2)

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 9y = 0 \cdots (I) \\ z_y = 3y^2 - 9x = 0 \cdots (II) \end{cases}$$

を解きます. (I) から  $y = \frac{1}{3}x^2$  となるので (II) から得られる  $y^2 = 3x$  に代入して

$$\frac{1}{9}x^4 = 3x \quad \text{すなわち} \quad x^4 = 27x$$

を得ます. 従って

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = 3$$

が必要です.

(a)  $x = 0$  のとき, (I) から  $y = 0$  となりますが, 逆に  $(x, y) = (0, 0)$  は (I) かつ (II) を満たします.

(b)  $x = 3$  のとき, (I) から  $y = 3$  となりますが, 逆に  $(x, y) = (3, 3)$  は (I) かつ (II) を満たします.

以上で  $z$  の停留点は  $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$  であることが分かりました.

(3)

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 4 = 0 \\ z_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから,  $(x, y) = (2, 0)$  が  $z$  の停留点であることが分かります.

(4)

$$\begin{cases} z_x = 2x + 4y - 6 = 0 \\ z_y = 4x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1$$

から停留点は  $(x, y) = (1, 1)$  となります.

(5)

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - y = 0 & (i) \\ z_y = -x - 2y = 0 & (ii) \end{cases}$$

を解きます. (ii) から  $x = -2y$  となりますが, これを (i) に代入して

$$12y^2 - y = 0$$

を得ますが, これから  $y = 0$  または  $y = \frac{1}{12}$  であることが分かります. これを  $x = -2y$  に代入して

$$\begin{array}{ll} y = 0 & \text{のとき} \quad x = 0 \\ y = \frac{1}{12} & \text{のとき} \quad x = -\frac{1}{6} \end{array}$$

となりますから, 停留点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$$

であることが分かります.