2021 年 11 月 17 日演習問題解答

I $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ に対して固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ を求めて、すべての固有値に対して固有ベクトルを求めよ。

解答

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+2 & -1 \\ -1 & -\lambda-2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda^2-2) = (\lambda+2)(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$$

から A の固有値は $\lambda = -2, \pm\sqrt{2}$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\lambda = -2$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (\#\ 1)$$

において

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = 0, y + z = 0$$

であることが分かります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります.

(ii) $\lambda = \sqrt{2}$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}+1 & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (\#\ 2)$$

において $\mathrm{rank}(A-\sqrt{2}I_3)=2$ ですから

$$(\#2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}+1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

が分かります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

(iii) $\underline{\lambda = -\sqrt{2}\text{ のとき}}$ (ii) と同様に固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\sqrt{2}+2 \\ -\sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

II 次の 3 次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して固有値と固有ベクトルをすべて求めましょう．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(4)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

解答　(1)

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 \\ -5 & \lambda - 6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 6)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 4, 6$ であることが分かります．

次に固有ベクトルを求めます．

(i) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#1}$$

において

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow y = z = 0$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

であることが分かります．

(ii) $\underline{\lambda = 4 \text{ のとき}}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#2}$$

において

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{15} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#2) \Leftrightarrow x - \frac{11}{15}z = 0, \quad y + \frac{2}{5}z$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{15}z \\ -\frac{2}{5}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15}z \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

(iii) $\underline{\lambda = 6 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5&-2&-3\\0&2&0\\0&-5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0} \qquad (\#3)$$

において

$$\begin{pmatrix}5&-2&-3\\0&2&0\\0&-5&0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}5&0&-3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1)\Leftrightarrow 5x-3z=0, y=0$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}z\\0\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{5}z\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}\qquad(z\neq 0)$$

であることが分かります.

注意　ここでさらに

$$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{p}_2=\begin{pmatrix}11\\-6\\15\end{pmatrix},\ \vec{p}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix},\quad P=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$\begin{aligned}AP&=(A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3)=(1\cdot\vec{p}_1\ 4\cdot\vec{p}_2\ 6\cdot\vec{p}_3)\\&=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

と A が対角化されます.

(2)

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 1, 2$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda = -1\text{ のとき}}$行列式の計算における行基本変形を用いると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#1}$$

であることが分かります. さらに

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z,\ y = 0$$

となります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

(ii) $\underline{\lambda = 1\text{ のとき}}$ 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#2}$$

において

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#2) \Leftrightarrow x - 3z = 0, \quad y - 2z = 0$$

となります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

(iii) $\underline{\lambda = 2 \text{ のとき}}$ 固有多項式を求めるために用いた行基本変形を用いると

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#3}$$

において

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & -1 & 3\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z, y = 3z$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\3z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

注意　ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$\begin{aligned}AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (-1\cdot\vec{p}_1\ 1\cdot\vec{p}_2\ 2\cdot\vec{p}_3)\\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

と A が対角化されます.

(3)

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2
\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 3$(重根) であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda = 1\text{ のとき}}$行列式の計算における行基本変形を用いると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#1}$$

であることが分かりますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = 2z,\ y = -z$$

となります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

(ii) $\underline{\lambda = 3\text{ のとき}}$ 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & & \\ 0 & 0 & 01 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y - z = 0 \tag{\#2}$$

となります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

であることが分かります.

注意　ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

と定めます. 一般論によって

$$V(1) \oplus V(3)$$

が成立しますから, $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$ とすると

$$c_1\vec{p}_1 = \vec{0},\ c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

となります．$\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ であることが分かります．

$$c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $c_2 = c_3 = 0$ が従います．よって P は正則となります．

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (1 \cdot \vec{p}_1\ 3 \cdot \vec{p}_2\ 3 \cdot \vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と A が対角化されます．

(4)

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-2 & 0\\ -2 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-4)-4(\lambda-4)-4(\lambda-2)\\ &= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-4)-8(\lambda-3)\\ &= \lambda(\lambda-3)(\lambda-6)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda=0,3,6$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda=0\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0} \tag{\#1}$$

を解きます.

$$A\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1)\Leftrightarrow x=-2z,\ y=2z$$

となります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2z\\2z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\quad(z\neq0)$$

であることが分かります.

(ii) $\underline{\lambda=3\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-2&-2\\-2&1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0} \tag{\#2}$$

において

$$\begin{pmatrix}0&-2&-2\\-2&1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#2)\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}z=0,\quad y+z=0$$

となります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\-z\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}z\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}\quad(z\neq0)$$

であることが分かります.

(iii) $\underline{\lambda = 6 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\-2 & 4 & 0\\-2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#2)$$

において

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\-2 & 4 & 0\\-2 & 0 & 2\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z, y = \frac{1}{2}z$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}z\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります．

注意　ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}, \ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}, \ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$\begin{aligned}AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (0 \cdot \vec{p}_1\ 3 \cdot \vec{p}_2\ 6 \cdot \vec{p}_3)\\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

と A が対角化されます．

補足　${}^tA = A$ すなわち A が対称であることから

$$\vec{p}_i \perp \vec{p}_j \quad (i \neq j)$$

が成立します．ここで

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}, \ \vec{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}, \ \vec{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$$

とすると

$$(\vec{q}_i, \vec{q}_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad ||\vec{q}_i||^2 = 1\ (i = 1, 2, 3)$$

から Q は直交行列であることが分かります．このとき P と同様に

$${}^tQAQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

と対角化できます．そして

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

と直交座標変換を用いると，${}^tQ$ も直交であることから

$$\begin{aligned}
\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= \left({}^tQA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tQ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\
&= \left({}^tQAQ \cdot {}^tQ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tQ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right) \\
&= 3\eta^2 + 6\zeta^2
\end{aligned}$$

となります.

III $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$A\text{は正則} \Leftrightarrow \Phi_A(0) \neq 0$$

が成立することを証明しましょう。

解答

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 \ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3|$$

に $\lambda = 0$ を代入すると

$$\Phi_A(0) = |-\vec{a}_1 \ -\vec{a}_2 \ -\vec{a}_3| = (-1)^3 \, |\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3| = -|A|$$

から

$$\Phi_A(0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A\text{は正則である}$$

ことが分かります.

IV (演習 8.1)$A \in M_3(\mathbf{K})$ を $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3)$ と列ベクトル表示をするとき

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 \ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3|$$

において各列の線型性を用いて展開して

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + c_1\lambda - \det(A)$$

において

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \lambda\,|\vec{e}_1\ \lambda\vec{e}_2-\vec{a}_2\ \lambda\vec{e}_3-\vec{a}_3| - |\vec{a}_1\ \lambda\vec{e}_2-\vec{a}_2\ \lambda\vec{e}_3-\vec{a}_3| \\
&= \lambda^2\,|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \lambda\vec{e}_3-\vec{a}_3| - \lambda\,|\vec{e}_1\ \ -\vec{a}_2\ \lambda\vec{e}_3-\vec{a}_3| \\
&\quad - \lambda\,|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \lambda\vec{e}_3-\vec{a}_3| + |\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \lambda\vec{e}_3-\vec{a}_3| \\
&= \lambda^3\,|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3| - \lambda^2\,|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| - \lambda^2\,|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| + \lambda\,|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| \\
&\quad - \lambda^2\,|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3| + \lambda\,|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| + \lambda\,|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| - \lambda\,|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| \\
&= \lambda^3 - \lambda^2\left(|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3| + |\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| + |\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3|\right) \\
&\quad + \lambda\left(|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| + |\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| + |\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3|\right) - \det(A)
\end{aligned}
$$

となります．さらに

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3| &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \\
|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| &= \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = a_{22} \\
|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| &= \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

であることを用いると

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + c_1\lambda - \det(A)$$

において

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が成立することが分かります．

V $\vec{a}(t),\vec{b}(t),\vec{c}(t)$ を 3 次元ベクトルに値をとる微分可能な関数とします．このとき

$$\frac{d}{dt}\left|\vec{a}(t)\ \vec{b}(t)\ \vec{c}(t)\right| = \left|\frac{d}{dt}\vec{a}(t)\ \vec{b}(t)\ \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t)\ \frac{d}{dt}\vec{b}(t)\ \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t)\ \vec{b}(t)\ \frac{d}{dt}\vec{c}(t)\right|$$

を示しましょう．これを用いて

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + c_1\lambda - \det(A)$$

において

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\left|\vec{a}(t)\quad \vec{b}(t)\quad \vec{c}(t)\right| = \sum_{*} \varepsilon(i,j,k)\cdot a_i(t)b_j(t)c_k(t)$$

の両辺を微分するために一般化された Leibiniz の公式

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

を用います（ここで*はすべての順列 (i,j,k) に関する和であることを意味します）．

$$\begin{aligned}
&\left|\vec{a}(t)\quad \vec{b}(t)\quad \vec{c}(t)\right| \\
&= \sum_{*}\varepsilon(i,j,k)\cdot a_i'(t)b_j(t)c_k(t) + \sum_{*}\varepsilon(i,j,k)\cdot a_i(t)b_j'(t)c_k(t) + \sum_{*}\varepsilon(i,j,k)\cdot a_i(t)b_j(t)c_k'(t) \\
&= \left|\tfrac{d}{dt}\vec{a}(t)\quad \vec{b}(t)\quad \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t)\quad \tfrac{d}{dt}\vec{b}(t)\quad \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t)\quad \vec{b}(t)\quad \tfrac{d}{dt}\vec{c}(t)\right|
\end{aligned}$$

であることが従います．この式を

$$\Phi_A(\lambda) = \left|\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1\quad \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2\quad \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3\right|$$

の両辺を λ で微分するのに用いると

$$\frac{d}{d\lambda}\Phi_A(\lambda) = \left|\vec{e}_1\quad \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2\quad \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3\right| + \left|\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1\quad \vec{e}_2\quad \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3\right| + \left|\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1\quad \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2\quad \vec{e}_3\right|$$

となります．これから

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{d}{d\lambda}\Phi_A(0) \\
&= \left|\vec{e}_1\quad -\vec{a}_2\quad -\vec{a}_3\right| + \left|-\vec{a}_1\quad \vec{e}_2\quad -\vec{a}_3\right| + \left|-\vec{a}_1\quad -\vec{a}_2\quad \vec{e}_3\right| \\
&= \left|\vec{e}_1\quad \vec{a}_2\quad \vec{a}_3\right| + \left|\vec{a}_1\quad \vec{e}_2\quad \vec{a}_3\right| + \left|\vec{a}_1\quad \vec{a}_2\quad \vec{e}_3\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

であることが分かります．

VI $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$\Phi_{{}^tA}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$
\begin{aligned}
\Phi_{{}^tA} &= \left|\lambda I_3 - {}^tA\right| = \left|{}^t\left(\lambda I_3 - A\right)\right| \\
&= |\lambda I_3 - A| = \Phi_A(\lambda)
\end{aligned}
$$

が成立します.

VII(VIII の準備) $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします. $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が条件

$$\alpha \neq \beta$$

を満たすとします. さらに $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, A\vec{q} = \beta\vec{q}$$

$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$$

を満たすならば、

$$\vec{p} = \vec{q} = \vec{0}$$

が成立することを証明しましょう.

解答

$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{0} \tag{4}$$

の両辺に A を掛けると

$$\alpha\vec{p} + \beta\vec{q} = \vec{0} \tag{5}$$

が, β を掛けると

$$\beta\vec{p} + \beta\vec{q} = \vec{0} \tag{6}$$

が従います. (5)−(6) から

$$(\alpha - \beta)\vec{p} = \vec{0}$$

が成立することが分かりますが, $\alpha \neq \beta$ から $\vec{p} = \vec{0}$ が従います. さらにこれを (4) に代入すると $\vec{q} = \vec{0}$ も分かります.

注意　ここでは $A \in M_3(\mathbf{K})$, $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^3$ としていますが

$$A \in M_n(\mathbf{K}), \quad \vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^n$$

でも解答はそのままです.

VIII $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします．$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ が条件

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

を満たすとします．さらに $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, A\vec{q} = \beta\vec{q}, A\vec{r} = \gamma\vec{r}$$

$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0}$$

を満たすならば、

$$\vec{p} = \vec{q} = \vec{r} = \vec{0}$$

が成立することを証明しましょう．

解答 VII に帰着する形で証明します．

$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0} \tag{7}$$

の両辺に A を掛けると

$$\alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r} = \vec{0} \tag{8}$$

が，γ を掛けると

$$\gamma\vec{p} + \gamma\vec{q} + \gamma\vec{r} = \vec{0} \tag{9}$$

が従います．(8)−(9) から

$$(\alpha - \gamma)\vec{p} + (\beta - \gamma)\vec{q} = \vec{0}$$

が成立することが分かります．ここで

$$A \cdot (\alpha - \gamma)\vec{p} = (\alpha - \gamma)A\vec{p} = (\alpha - \gamma)\alpha\vec{p} = \alpha \cdot (\alpha - \gamma)\vec{p}$$
$$A \cdot (\beta - \gamma)\vec{q} = (\beta - \gamma)A\vec{q} = (\beta - \gamma)\beta\vec{q} = \beta \cdot (\beta - \gamma)\vec{q}$$

がら II が適用できて

$$(\alpha - \gamma)\vec{p} = (\beta - \gamma)\vec{q} = \vec{0}$$

となりますが，$\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$ から

$$\vec{p} = \vec{q} = \vec{0}$$

が従います．これを (7) に代入すると $\vec{r} = \vec{0}$ であることも分かります．

注意　ここでは $A \in M_3(\mathbf{K})$, $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbf{K}^3$ としていますが

$$A \in M_n(\mathbf{K}), \quad \vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbf{K}^n$$

でも解答はそのままです．

発展問題　$A \in M_n(\mathbf{K})$, $\vec{p}_j \in \mathbf{K}^n$ $(j = 1, \ldots, \ell)$ が

$$\vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_\ell = \vec{0}$$

$$A\vec{p}_j = \alpha_j\vec{p}_j \quad (j = 1, \ldots, \ell)$$

$$\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$$

を満たすとします．このとき

$$\vec{p}_1 = \cdots = \vec{p}_\ell = \vec{0}$$

が成立することを ℓ に関する帰納法で証明しましょう．