2次元部分空間について（続き）

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbb{R}^n$ 中に

$$L(\vec{a}, \vec{b}) = \{ x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbb{R}^n \,;\, x, y \in \mathbb{R} \}$$

を定義した。$\vec{a}, \vec{b}$ が生成する部分空間と呼ぶ。

定理. $\vec{p}, \vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow s\vec{p} + t\vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$

$$\begin{cases} \vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} \\ \vec{q} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} \end{cases}$$

と表現すると

$$\begin{aligned} s\vec{p} + t\vec{q} &= s(x_1\vec{a} + y_1\vec{b}) + t(x_2\vec{a} + y_2\vec{b}) \\ &= (sx_1 + tx_2)\vec{a} + (sy_1 + ty_2)\vec{b} \\ &\in L(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

注意. この計算は行列で以下のように表現できます。

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\vec{p}\ \vec{q}) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\ &= (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} sx_1 + ty_1 \\ sx_2 + ty_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例1　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{p}=\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\-5\\-8\end{pmatrix}$

のとき　$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ で

$$\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b},\quad \vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}$$

から　$(\vec{p}\ \vec{q})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}2&1\\1&-3\end{pmatrix}$

$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ の下で

$$\begin{vmatrix}2&1\\1&-3\end{vmatrix}\neq 0 \iff \vec{p}\nparallel\vec{q}$$

であったことに注意する。$\begin{vmatrix}2&1\\1&-3\end{vmatrix}\neq 0$ から $\begin{pmatrix}2&1\\1&-3\end{pmatrix}$ は正則で

$$(\vec{a}\ \vec{b})=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}2&1\\1&-3\end{pmatrix}^{-1}=(\vec{p}\ \vec{q})\left(-\frac{1}{7}\right)\begin{pmatrix}-3&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

と表わされる。

(座標)　$\vec{v}\in L(\vec{a},\vec{b})$ とすると

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}=x'\vec{a}+y'\vec{b}$$

と2通りに表現されると

$$(x-x')\vec{a}+(y-y')\vec{b}=\vec{0}$$

から　$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ であるので

$$x=x',\quad y=y'$$

となります。$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を $\vec{v}\in L(\vec{a},\vec{b})$ の基底 $\{\vec{a},\vec{b}\}$ による座標と呼びます。

以下では $T=\begin{pmatrix}2&1\\1&-3\end{pmatrix}$ とします。このとき

$$(\vec{p}\ \vec{q})=(\vec{a}\ \vec{b})T,\quad (\vec{a}\ \vec{b})=(\vec{p}\ \vec{q})T^{-1}$$

となります。

例12　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{p}=\begin{pmatrix}5\\8\\11\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

このとき　$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ で

$$\vec{p} = 2\vec{a}+3\vec{b}, \quad \vec{q} = 4\vec{a}-\vec{b}$$

から

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}2&4\\3&-1\end{pmatrix}$$

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ の下で

$$\begin{vmatrix}2&4\\3&-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&3\\4&-1\end{vmatrix} \neq 0 \iff \vec{p} \nparallel \vec{q}$$

に注意します. $\begin{vmatrix}2&4\\3&-1\end{vmatrix} \neq 0$ から $\begin{pmatrix}2&4\\3&-1\end{pmatrix}$ は正則で

$$(\vec{a}\ \vec{b}) = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}2&4\\3&-1\end{pmatrix}^{-1} = (\vec{p}\ \vec{q})\left(-\frac{1}{13}\right)\begin{pmatrix}-1&-4\\-3&2\end{pmatrix}$$

となります.

(座標)　$\vec{v} \in L(\vec{a},\vec{b})$ とすると

$$\vec{v} = x\vec{a}+y\vec{b} = x'\vec{a}+y'\vec{b}$$

と2通りに表現されると

$$(x-x')\vec{a}+(y-y')\vec{b} = \vec{0}$$

から　$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ なので　$x=x'$, $y=y'$

となります. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を $\vec{v} \in L(\vec{a},\vec{b})$ の基底 $\vec{a},\vec{b}$ による**座標**と呼びます.

以下では $T=\begin{pmatrix}2&4\\3&-1\end{pmatrix}$ とします. このとき

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})T, \quad (\vec{a}\ \vec{b}) = (\vec{p}\ \vec{q})T^{-1}$$

となります.

No. (　　)

1313 $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix}1\\-9\\4\end{pmatrix}$

のとき $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ で

$$\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$$

から

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix}2&3\\1&-2\end{pmatrix}$$

となります.

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ の下で $\begin{vmatrix}2&1\\3&-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&3\\1&-2\end{vmatrix} \neq 0 \iff \vec{p} \nparallel \vec{q}$

に注意します. $\begin{vmatrix}2&3\\1&-2\end{vmatrix} \neq 0$ から $\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\end{pmatrix}$ は正則で

$$(\vec{a}\ \vec{b}) = (\vec{p}\ \vec{q}) \left(-\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix}-2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$$

となります.

(座標) $\vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ とすると

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$$

と2通りに表されると

$$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0}$$

から $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ なので

$$x = x', \quad y = y'$$

となります. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を $\vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ の基底 $\vec{a}, \vec{b}$ による座標と呼びます.

以下では $T = \begin{pmatrix}2&3\\1&-2\end{pmatrix}$ とします. このとき

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})\,T, \quad (\vec{a}\ \vec{b}) = (\vec{p}\ \vec{q})\,T^{-1}$$

が成立します.

一般論に戻ります。以下では $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ が $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ を満たし $\vec{p},\vec{q}\in L(\vec{a},\vec{b})$ が

$$\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b},\quad \vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}$$

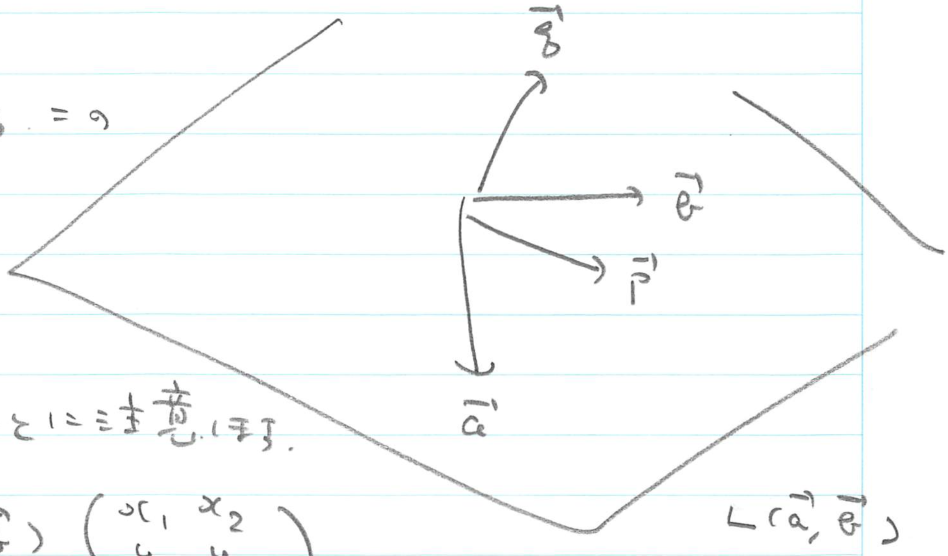
が

$$\vec{p}\nparallel\vec{q}$$

を満たすとします。この条件は

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

と必要十分であることに注意します。



$$(\vec{p}\ \vec{q})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

から

$$(\vec{a}\ \vec{b})=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

が従うことに注意します。以下 $T=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ とします。

$$s\vec{p}+t\vec{q}\in L(\vec{a},\vec{b})$$

から

$$L(\vec{p},\vec{q})\subset L(\vec{a},\vec{b})$$

ですが

$$\boxed{L(\vec{p},\vec{q})=L(\vec{a},\vec{b})}$$

となります。

実際 $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ に対して

$$\vec{v} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L(\vec{p}, \vec{q})$$

が従います.

$\forall \vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ は $\vec{v} = s\vec{p} + t\vec{q} = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$

と表わされることが分かりました. $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ から $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

は一意的に定まります.

$$\vec{v} = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

その逆

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

が成立することが分かりました. （座標変換）

慶應義塾大学