SL03 演習問題解答

I

(1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a}, \vec{b}$ が作る平行四辺形の面積は

$$||\vec{a} \times \vec{b}||$$

であることを示しましょう．また

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

であることを示しましょう．

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が作る平行四面体の体積は

$$|(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|$$

であることを示しましょう．

解答 (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ なす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

から

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta &= \frac{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2} \\
&= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3)^2(b_1^2 + b_2^3 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2} \\
&= \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2}{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2} \\
&= \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2}{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2}
\end{aligned}$$

となります．これから

$$\sin\theta = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

であることが分かり，平行四辺形の面積 S は

$$S = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin\theta = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

であることが従います．$(\times,) = \mathrm{a}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
$= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$
$= b_1(a_2a_3 - a_2a_3) + b_2(-a_1a_3 + a_1a_3) + b_3(a_1a_2 - a_1a_2) = 0$ 同様に $(\times,) = \mathrm{b}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
$= b_1(a_2b_3 - a_3b_2) - b_2(a_1b_3 - a_3b_1) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1)$
$= a_1(-b_2b_3 + b_2b_3) + a_2(b_1b_2 - b_1b_3) + a_3(-b_1b_2 + b_1b_2) = 0$

注意 3 次行列式を用いると

$$(\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}) = (\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}) = 0$$

であることは簡単に導けます.

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が作る平行四辺形を底面として考えます. この時 $\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ の間の角を φ とすると, 高さ h は

$$h = \|\vec{c}\|\cdot|\cos\varphi| = \|\vec{c}\|\cdot\left|\frac{(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b})}{\|\vec{c}\|\cdot\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\right| = \left|\frac{(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b})}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\right|$$

と求まります. 従って平行 6 面体の体積 V は

$$V = S\cdot h = \left|(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b})\right|$$

となります. 3 次行列式を用いると

$$\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = (\vec{c},\vec{a}\times\vec{a})$$

が成立しますから

$$V = \left|\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\right|$$

とも表せます.

II $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R}^3$ とします. このとき

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

とします. このとき

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

さらに $\vec{a}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{a}$ から $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ が従います.

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
+ \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}
\end{aligned}
$$

III 直線 ℓ_1

$$
\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 3x-2y+z+5=0 \end{cases}
$$

直線 ℓ_2

$$
\begin{cases} x-z+1=0 \\ 3x+2y-z+2=0 \end{cases}
$$

があります. 原点を通り直線 ℓ_1, ℓ_2 に交わる直線を求めましょう.

解答直線 ℓ_1 と原点を含む平面 π_1 は

$$
5(x+y+z+1)-(3x-2y+z+5)=0 \quad \text{すなわち} \quad 2x+7y+4x=0 \tag{1}
$$

他方, 直線 ℓ_2 と原点を含む平面 π_2 は

$$
2(x-z+1)-(3x+2y-z+2)=0 \quad \text{すなわち} \quad -x-2y-z=0 \tag{2}
$$

であることが分かります. π_1 と π_2 の交わりは (1) かつ (2) を解いて

$$
x=\frac{1}{3}z, \quad y=-\frac{2}{3}z \tag{3}
$$

となる. この直線を ℓ とすると, ℓ が求める直線である. 実際 ℓ_1 の方向ベクトル

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}
$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は π_1 に平行で

$$
\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

が成立しますから π_1 中 ℓ_1 と ℓ は交わります．他方，ℓ_2 の方向ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ は π_2 に平行で

$$\begin{pmatrix}-1\\4\\55\end{pmatrix}\nparallel\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

が成立しますから π_2 中 ℓ_2 と ℓ は交わります．よって ℓ は原点を通り，ℓ_1 と ℓ_2 と交わります.

IV 次の行列の積を計算しましょう.

(1) $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(7)** $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(8)** $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(10)** $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(11)** $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

解答

(1)

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha & 0\\ 0 & \cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+\lambda y\\ y\end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ x+\lambda y\end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\ y\end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \lambda+\mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & \lambda a_1+b_1\\ a_2 & \lambda a_2+b_2\end{pmatrix}\quad i.e.\quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \lambda\vec{a}+\vec{b})$$

(10)

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1 & b_1\\ \lambda a_2 & b_2\end{pmatrix}\quad i.e.\quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(\lambda\vec{a}\ \vec{b})$$

(11)

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1 & a_1\\ b_2 & a_2\end{pmatrix}\quad i.e.\quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=(\vec{b}\ \vec{a})$$

V $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対してその転置行列を ${}^tA=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ によって定義します. $\vec{v},\vec{w}\in\mathbf{R}^2$ に対して

$$(A\vec{v},\vec{w})=(\vec{v},{}^tA\vec{w})$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}),\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned}(A\vec{v},\vec{w})&=(x\vec{\alpha}+y\vec{\beta},\vec{w})=x(\vec{\alpha},\vec{w})+y(\vec{\beta},\vec{w})\\ &=\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}(\vec{\alpha},\vec{w})\\ (\vec{\beta},\vec{w})\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

となる．他方

$${}^tA\vec{w}=\begin{pmatrix}{}^t\vec{\alpha}\\ {}^t\vec{\beta}\end{pmatrix}\vec{w}=\begin{pmatrix}{}^t\vec{\alpha}\vec{w}\\ {}^t\vec{\beta}\vec{w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\vec{\alpha},\vec{w})\\ (\vec{\beta},\vec{w})\end{pmatrix}$$

から

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^t A\vec{w} \right) = (\vec{v}, {}^t A\vec{w})$$

が従います.