ハンドアウト（転置行列）

$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とする.

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tA\vec{y}) \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m)$$

証明

$$\text{左} = (x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n, \vec{y})$$
$$= x_1(\vec{a}_1, \vec{y}) + \cdots + x_n(\vec{a}_n, \vec{y})$$
$$= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{y}) \\ \vdots \\ (\vec{a}_n, \vec{y}) \end{pmatrix} \right)$$
$$= \left(\vec{x}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1\vec{y} \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n\vec{y} \end{pmatrix} \right) = (\vec{x}, {}^tA\vec{y})$$

系 A : 実 $m \times n$ 行列, B : 実 $n \times l$ 行列 に対して

$$ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^l, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$((AB)\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t(AB)\vec{y})$$

一方

$$((AB)\vec{x}, \vec{y}) = (B\vec{x}, {}^tA\vec{y}) = (\vec{x}, {}^tB\,{}^tA\vec{y})$$

任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^l$ に対して

$$(\vec{x}, {}^t(AB)\vec{y}) = (\vec{x}, {}^tB\,{}^tA\vec{y})$$

が成立するので

$$ {}^t(AB)\vec{y} = {}^tB\,{}^tA\vec{y}$$

これが任意の $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ で成立するので ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$