L15 2020 年 11 月 27 日確認問題

I V, W が $\mathbf{K}^n$ の部分空間とします．$V+W$ が直和ならば

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$$

であることを証明しましょう．

解答 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ は V の基底であり，$\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\ell$ は W の基底とします．このとき $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\ell$ は $V+W$ の基底であることを示します．$\vec{p} \in V+W$ に対して

$$\vec{p} = \vec{v} + \vec{w}$$

を満たす $\vec{v} \in V$, $\vec{w} \in W$ が存在することが分かります．このとき V の基底と W の基底を用いて $\vec{v}$ と $\vec{w}$ は

$$\begin{aligned}\vec{v} &= c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k \\ \vec{w} &= c_{k+1}\vec{w}_1 + \cdots + c_{k+\ell}\vec{w}_\ell\end{aligned}$$

と表されますから

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{v} + \vec{w} \\ &= c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k \\ &\quad c_{k+1}\vec{w}_1 + \cdots + c_{k+\ell}\vec{w}_\ell\end{aligned}$$

と表されます．さらに $V+W$ が直和であることを用いると

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k + c_{k+1}\vec{w}_1 + \cdots + c_{k+\ell}\vec{w}_\ell = \vec{0}$$

ならば

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$
$$c_{k+1}\vec{w}_1 + \cdots + c_{k+\ell}\vec{w}_\ell = \vec{0}$$

が従います．$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ は V は線型独立であり，$\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\ell$ も線型独立ですから

$$c_1 = \cdots = c_k = 0, \quad c_{k+1} = \cdots = c_{k+\ell} = 0$$

であることが分かります．よって

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\ell$$

が線型独立であることも分かります．以上で

$$\dim(V+W) = k + \ell = \dim(V) + \dim(W)$$

II $A \in M_n(\mathbf{R})$ が対称とします。
(1) F を $n \times \ell$ 行列とするとき
$$B = {}^tFAF$$
が対称であることを示しましょう。
(2) A が定める 2 次形式が非負定値とします。すなわち
$$(A\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$$
が成立するとします。このとき B が定める 2 次形式も非負定値となることを示しましょう。
(3) A が定める 2 次形式が正定値とします。また
$$F = (\vec{f_1} \ \cdots \vec{f_\ell})$$
と列ベクトル表示をするとき $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_\ell}$ は 1 次独立とします。このとき B が定める 2 次形式も正定値となることを示しましょう。

解答
$${}^t\left(B = {}^tFAF\right) = {}^tF \cdot {}^tB \cdot {}^t({}^tF) = {}^tF \cdot B \cdot F$$
から ${}^tFBF$ が対称であることが分かります.
(2) $\vec{w} \in \mathbf{R}^\ell$ に対して
$$(B\vec{w}, \vec{w}) = ({}^tFAF\vec{w}, \vec{w}) = (AF\vec{w}, F\vec{w}) \geq 0$$
から B が定める 2 次形式が非負定値であることが分かります.
(3) このとき A が定める 2 次形式が正定値であることから，B が定める 2 次形式は非負定値であること，すなわち $\vec{w} \in \mathbf{R}^\ell$ に対して
$$(B\vec{w}, \vec{w}) \geq 0$$
であることが分かります．さらに $\vec{w} \in \mathbf{R}^\ell$ に対して,
$$(B\vec{w}, \vec{w}) = ({}^tFAF\vec{w}, \vec{w}) = (AF\vec{w}, F\vec{w}) = 0$$
であることから $F\vec{w} = \vec{0}$ が従います．$\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_\ell}$ が 1 次独立であることから $\ker(F) = \{\vec{0}\}$ が成立しますから，$\vec{w} = \vec{0}$ が従います．以上から
$$\vec{w} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow (B\vec{w}, \vec{w}) > 0$$
が分かります．よって B が定める 2 次形式は正定値であることが示されました.

III $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ とします。すなわち、実 $m \times n$ 行列とします。このとき $\mathbf{R}^n$ 中で
$$\ker({}^tAA) = \ker(A)$$
が成立することを示しましょう。

解答 $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ に対して
$$A\vec{w} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad {}^tAA\vec{v} = \vec{0}$$

が成立しますから $\ker(A) \subset \ker({}^tAA)$ であることが分かります.

逆に $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ が ${}^tAA\vec{v} = \vec{0}$ を満たすとします．このとき

$$||A\vec{v}||^2 = (A\vec{v}, A\vec{v}) = ({}^tAA\vec{v}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

から $A\vec{v} = \vec{0}$ であることが従います．これから $\ker(A) \supset \ker({}^tAA)$ であることが分かります.

IV(1) $R = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in SO(3)$ で

$$\ker(R - I_3) = \mathbf{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

であることを示せ.

(2) $\vec{p}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ である $P \in SO(3)$ を求めて $P^{-1}RP$ を計算しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned} {}^tRR &= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & 8 \\ 7 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+64+1 & -16+8+8 & 28-32+4 \\ -16+8+8 & 16+1+64 & -28-4+32 \\ 28-32+4 & -28-4+32 & 49+16+16 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(R) &= \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 9 & 9 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{9^2}\begin{vmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9^2}\begin{vmatrix} 0 & -8 & 7 \\ 0 & -7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{9^2}(32+49) = \frac{1}{9^2}\cdot 81 = 1 \end{aligned}$$

から $R \in SO(3)$ であることが分かります．さらに

$$\begin{aligned} R - I &= \begin{pmatrix} -5 & -4 & 7 \\ 8 & -8 & -4 \\ 1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ -5 & -4 & 7 \\ 8 & -8 & -4 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 0 & -72 & 36 \\ 0 & 36 & -18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 36 & -18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と行基本変形できるので

$$R\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}x & & & - & z & = & 0\\ & & y & - & \frac{1}{2}z & = & 0\end{array}\right.$$

であることが分かります．これから $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\ker(R-I)$ とすると

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}z\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

となりますから

$$\ker(R-I)=\mathbf{R}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

であることが分かります．

(2) $\vec{p}_2\perp\vec{p}_1$, $||\vec{p}_2||=1$ を満たす $\vec{p}_2\in\mathbf{R}^3$ として

$$\vec{p}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

を選びます．さらに

$$\vec{p}_3=\vec{p}_1\times\vec{p}_2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}\left|\begin{smallmatrix}1&-2\\2&-1\end{smallmatrix}\right|\\-\left|\begin{smallmatrix}2&2\\2&-1\end{smallmatrix}\right|\\\left|\begin{smallmatrix}2&2\\1&-2\end{smallmatrix}\right|\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-2\end{smallmatrix}\right)$$

となります．$\vec{p}_1,\vec{p}_2$ の選び方から

$$||\vec{p}_1||=||\vec{p}_2||=1,\quad(\vec{p}_1,\vec{p}_2)=0$$

が成立します．さらに外積の性質から

$$(\vec{p}_1,\vec{p}_3)=(\vec{p}_2,\vec{p}_3)=0$$

が成立します．また $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ のなす角が $\frac{\pi}{2}$ であることから

$$||\vec{p}_3||=||\vec{p}_1||\cdot||\vec{p}_2||\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1$$

であることも分かります．さらに

$$\det(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)=(\vec{p}_1\times\vec{p}_2,\vec{p}_3)=||\vec{p}_3||^2=1$$

から $P\in SO(3)$ であることが分かります．このとき

$$P^{-1}RP={}^tPRP=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}81&0&0\\0&0&-81\\0&81&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

であることが分かります．

V $\vec{p}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ である $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \in SO(3)$ を求めましょう．

解答 $||\vec{p}_1|| = 1$ であることに注意しましょう．次に

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$$

と定めると

$$||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

であることが分かります．次に $\vec{p}_3 \in \mathbf{R}^3$ で

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$$

を満たすものを求めます．$\vec{e}_1$ の $V_2 = \mathbf{R}\vec{p}_1 + \mathbf{R}\vec{p}_2$ への直交射影

$$\begin{aligned}\vec{w}_2 &:= (\vec{p}_1, \vec{e}_1)\vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{e}_1)\vec{p}_2 \\ &= \left(\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\right) \cdot \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right)\end{aligned}$$

を用いて

$$\vec{q}_3 = \frac{1}{||\vec{e}_1 - \vec{w}_2||}(\vec{e}_1 - \vec{w}_2) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}4\\-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$$

と定めると

$$||\vec{q}_3||=1, \quad (\vec{p}_1,\vec{q}_3)=(\vec{p}_2,\vec{q}_3)=0$$

が成立します．さらに

$$\begin{aligned}|\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{q}_3| &= \left|\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right) \quad \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}4\\-1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right| \\ &= \frac{1}{18}\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\2 & 1 & -1\\2 & -1 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{18}\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\2 & 1 & -1\\0 & -2 & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{18}\cdot(-1)(-2)\begin{vmatrix}1 & 4\\2 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{9}\cdot(-9) = -1\end{aligned}$$

となります．ここで $\vec{p}_3 = -\vec{q}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}-4\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ と定めると

$$||\vec{p}_3|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$$

$$|\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3| = |\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ -\vec{q}_3| = -|\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{q}_3| = -(-1) = 1$$

が従います．以上で

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \in SO(3)$$

であることが分かります．

VI 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化して，各固有空間への射影を A で表しましょう．

解答

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda+ & 0 \\ 0 & -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda+ & 0 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)^2\{(\lambda+1)^2 - 2^2\} = (\lambda-1)^3(\lambda+3)
\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -3, 1$ であることが分かります．

次に固有ベクトルを求めます．

<u>$\lambda = -3$ のとき</u>

$$\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad x = w,\ y = -w,\ z = -w
\end{aligned}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ -w \\ -w \\ w \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (w \neq 0)$$

が固有ベクトルです．ここで $\vec{p}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と大きさが 1 の固有ベクトルを定めます．

<u>$\lambda = 1$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y - z + w = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z-w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \quad \text{OR} \quad z \neq 0 \quad \text{OR} \quad w \neq 0)$$

が固有ベクトルであることが分かります．

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を $V(1)$ の基底として選び，Gram-Schmidt の直交化を行うと

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となります．これが $V(1)$ の正規直交基底となります．

ここで $P = (\vec{p}_0\ \vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ とすると P は直交行列となり

$$AP = (-3\vec{p}_0\ \vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = (\vec{p}_0\ \vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} -3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

と対角化できます.

各固有空間への射影行列ですが $V(-3)$ と $V(1)$ への射影行列はそれぞれ

$$P_{-3} = \frac{1}{-3-1}(A - I_4) = -\frac{1}{4}(A - I_4), \quad P_1 = \frac{1}{1-(-3)}(A - (-3)I_4) = \frac{1}{4}(A + 3I_4)$$

となります.

VII 単位ベクトル $\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とします. 部分空間 $\mathbf{R}\vec{q}_1$ の直交補空間

$$V = (\mathbf{R}\vec{q}_1)^{\perp} = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{v}, \vec{q}_1) = 0\}$$

に関する鏡映 R を

$$R\vec{x} = \vec{x} + 2(P\vec{x} - \vec{x})$$

によって定義します. ただし, ここで P は V への直交射影とします.

(1) R を行列として表しましょう.

(2) $|R|$ を求めましょう.

(3) R を直交行列で対角化しましょう.

解答 (1) $\vec{q}_1$ を延長して $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底を求めます. まず

$$\vec{q}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$||\vec{q}_1|| = ||\vec{q}_2|| = 1, \quad (\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0$$

となります. 次に

$$\vec{q}_3 = \vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

とすると外積の幾何学的性質から

$$||\vec{q}_3|| = 1, \quad (\vec{q}_3, \vec{q}_1) = (\vec{q}_3, \vec{q}_2) = 0$$

が成立します. $\dim V = 2$ から $\vec{q}_2, \vec{q}_3$ が V の正規直交基底となりますから, $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$P\vec{v} = (\vec{v}, \vec{q}_2)\vec{q}_2 + (\vec{v}, \vec{q}_3)\vec{q}_3 = \left(\vec{q}_2 \cdot {}^t\vec{q}_2 + \vec{q}_3 \cdot {}^t\vec{q}_3\right)\vec{v}$$

となりますから

$$\begin{aligned} R &= 2P - I_3 \\ &= 2\vec{q}_2 \cdot {}^t\vec{q}_2 + 2\vec{q}_3 \cdot {}^t\vec{q}_3 - I_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)+(3)

$$\begin{aligned} R\vec{q}_1 &= 2(\vec{q}_1, \vec{q}_2)\vec{q}_2 + 2(\vec{q}_1, \vec{q}_3)\vec{q}_3 - \vec{q}_1 = -\vec{q}_1 \\ R\vec{q}_2 &= 2(\vec{q}_2, \vec{q}_2)\vec{q}_2 + 2(\vec{q}_2, \vec{q}_3)\vec{q}_3 - \vec{q}_2 = \vec{q}_2 \\ R\vec{q}_3 &= 2(\vec{q}_3, \vec{q}_2)\vec{q}_2 + 2(\vec{q}_3, \vec{q}_3)\vec{q}_3 - \vec{q}_3 = \vec{q}_3 \end{aligned}$$

から

$$R(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad Q^{-1}RQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$|R| = |Q^{-1}RQ| = \begin{vmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = -1$$

であることが分かります.