

L13 2020 年 10 月 30 日確認問題

I (1) $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{R}^n$ が正規直交系であることと ${}^tPP = I_3$ を満たすことが必要十分であることを示しましょう。

(2) $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{R}^n$ が正規直交系であるとします. 3 次正方形行列 R に対して

$$(\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)R$$

として $\vec{q}_j \in \mathbf{R}^n$ ($j = 1, 2, 3$) を定めると

$$R \text{ が直交行列} \Leftrightarrow \vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \text{ が正規直交系}$$

であることを示しましょう。

解答 (1)

$${}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_3 \end{pmatrix} (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} \|\vec{p}_1\| & (\vec{p}_1, \vec{p}_2) & (\vec{p}_1, \vec{p}_3) \\ (\vec{p}_2, \vec{p}_1) & \|\vec{p}_2\| & (\vec{p}_2, \vec{p}_3) \\ (\vec{p}_3, \vec{p}_1) & (\vec{p}_3, \vec{p}_2) & \|\vec{p}_3\| \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{aligned} {}^tPP = I_3 &\Leftrightarrow (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \text{ は正規直交系である} \end{aligned}$$

ことが分かります。

(2) $Q = (\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3)$ とすると

$${}^tQQ = {}^tR{}^tPPR = {}^tRR$$

であることが分かります。このとき

$$\begin{aligned} \vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \text{ が正規直交系である} &\Leftrightarrow {}^tQQ = I_3 \\ &\Leftrightarrow {}^tRR = I_3 \\ &\Leftrightarrow R \text{ は直交行列である} \end{aligned}$$

ことが分かります。

II (1) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{pmatrix}$ を計算して $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & A \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & B \\ 0 & \end{pmatrix}$$

を求めましょう.

(2) ${}^t \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & r & s \end{pmatrix}$ を計算して $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して ${}^t \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & A \\ 0 & \end{pmatrix}$ を求めましょう.

(3) 2次正方行列 $R \in M_2(\mathbf{R})$ が回転行列(より一般には直交行列)とします. このとき $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R \\ 0 & \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & px + qz & py + qw \\ 0 & rx + sz & ry + sw \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & A \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & B \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & AB \\ 0 & \end{pmatrix}$$

であることが分かります.

(2)

$${}^t \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p & r \\ 0 & q & s \end{pmatrix}$$

から

$${}^t \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & A \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & {}^t A \\ 0 & \end{pmatrix}$$

であることが分かります.

(3)

$$\begin{aligned} {}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R \\ 0 & \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t R \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R \\ 0 & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t R R \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 \\ 0 & \end{pmatrix} = I_3 \end{aligned}$$

から $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R \\ 0 & \end{pmatrix}$ が直交行列であることが分かります.

III $A \in M_3(\mathbf{R})$ が対称とします.

(1) $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$, $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ならば $(\vec{v}, A\vec{w}) = 0$ が $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3$, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して成立することを示しましょう.

(2) $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \in \mathbf{R}^3$ が正規直交系とします. $A\vec{q}_1 = \alpha\vec{q}_1$ が成立するとき

$$A(\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3) = (\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

と $a, b, c \in \mathbf{R}$ を用いて表されることを示しましょう.

解答 (1)

$$(\vec{v}, A\vec{w}) = ({}^t A\vec{v}, \vec{w}) = (A\vec{v}, \vec{w}) = (\alpha\vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

(2) $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ が \mathbf{R}^3 の基底ですから

$$A\vec{q}_2 = f_1\vec{q}_1 + f_2\vec{q}_2 + f_3\vec{q}_3, \quad A\vec{q}_3 = g_1\vec{q}_1 + g_2\vec{q}_2 + g_3\vec{q}_3$$

さらに (1) から

$$0 = (A\vec{q}_2, \vec{q}_1) = f_1, \quad 0 = (A\vec{q}_3, \vec{q}_1) = g_1$$

であることが分かります. さらに A が対称ですから

$$(A\vec{q}_2, \vec{q}_3) = (\vec{q}_2, A\vec{q}_3)$$

から

$$f_3 = g_2$$

が分かります. ここで $f_2 = a, f_3 = g_2 = c, g_3 = b$ とすると

$$A(\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3) = (\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

であることが分かります.

IV $A \in M_3(\mathbf{R})$ が対称とします.

(1)

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \geq 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \right) \Leftrightarrow A \text{の固有値 } \alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

であることを示しましょう.

(2)

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \geq 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \right)$$

ならば

$$a_{11}, a_{22}, a_{33} \geq 0, \quad |A_2| \geq 0, \quad |A| \geq 0$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1) 直交行列 $P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3)$ が存在して

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

が成立して,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

と直交座標変換をすると

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \alpha \xi^2 + \beta \eta^2 + \gamma \zeta^2$$

が成立します.

(\Rightarrow)

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, \quad A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

から

$$0 \leq (A\vec{p}_1, \vec{p}_1) = \alpha, \quad 0 \leq (A\vec{p}_2, \vec{p}_2) = \beta, \quad 0 \leq (A\vec{p}_3, \vec{p}_3) = \gamma$$

(\Leftarrow)

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \alpha \xi^2 + \beta \eta^2 + \gamma \zeta^2 \geq 0$$

が $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ から成立します.

(2)

$$0 \leq (A\vec{e}_1, \vec{e}_1) = a_{11}, \quad 0 \leq (A\vec{e}_2, \vec{e}_2) = a_{22}, \quad 0 \leq (A\vec{e}_3, \vec{e}_3) = a_{33}$$

次に対称な $B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$(B\vec{v}, \vec{v}) \geq 0 \Leftrightarrow B \text{の固有値 } \alpha, \beta \geq 0 \\ a, b \geq 0, \quad |B| \geq 0$$

であることを用います. $A = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}$ とすると

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

となります. このとき $|A_2| \geq 0$ が従います.

最後に A の固有値 $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

が成立しますから,

$$|A| = |P^{-1}AP| = \begin{vmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma \geq 0$$

が成立します.

V 以下の 2 次形式が正定値となる $a \in \mathbf{R}$ の条件を求めましょう.

(1) $x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2axy + 4axz + 2yz$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2a(xy + yz + zx)$

解答 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 3 & 1 \\ 2a & 1 & 2 \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式ですから,

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 3 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 3 & 1 \\ 2a & 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

が求める条件です.

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 3 \end{vmatrix} = 3 - a^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \quad (\$)$$

となります. 次に

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 3 & 1 \\ 2a & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 - 2a^2)$$

となりますから

$$(\$) \text{ AND } |A| > 0 \Leftrightarrow (\$) \text{ AND } 1 - 2a^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

であることが分かります.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式ですから,

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} > 0$$

が求める条件です.

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < a < 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(2a+1) > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2} \quad \text{AND} \quad a \neq 1$$

から条件は

$$-\frac{1}{2} < a < 1$$

であることが分かります.