第 11 講義 2020 年 10 月 16 日　演習問題解答

I $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$ は $\vec{a} = {}^t(a_1\ a_2\ a_3) \neq \vec{0}$ を満たすとします。$\det(I_3 + \vec{a} \cdot {}^t\vec{a})$ を計算しましょう。

解答　$\vec{a}$ を含む $\mathbf{R}^3$ の基底 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を

$$(\vec{a}, \vec{b}) = {}^t\vec{a}\vec{b} = 0, \quad (\vec{a}, \vec{c}) = {}^t\vec{a}\vec{c} = 0,$$

が成立するように取ります．具体的には部分空間

$$V := \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{a}, \vec{v}) = 0\}$$

の基底 $\vec{b}, \vec{c}$ を選びます．このとき

$$\begin{aligned}
(I_3 + \vec{a}\,{}^t\vec{a})\vec{a} &= \vec{a} + ||\vec{a}||^2\vec{a} = (1 + ||\vec{a}||^2)\vec{a} \\
(I_3 + \vec{a}\,{}^t\vec{a})\vec{b} &= \vec{b} + (\vec{a}, \vec{b})\vec{a} = \vec{b} \\
(I_3 + \vec{a}\,{}^t\vec{a})\vec{c} &= \vec{c} + (\vec{a}, \vec{c})\vec{a} = \vec{c}
\end{aligned}$$

から

$$(I_3 + \vec{a}{}^t\vec{a})(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 + ||\vec{a}||^2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

となします．$P = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とすると P は正則行列で

$$P^{-1}(I_3 + \vec{a}{}^t\vec{a})P = \begin{pmatrix} 1 + ||\vec{a}||^2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．これから

$$\det(P^{-1}(I_3 + \vec{a}{}^t\vec{a})P) = \det(I_3 + \vec{a}{}^t\vec{a}) = \begin{vmatrix} 1 + ||\vec{a}||^2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1 + ||\vec{a}||^2$$

が従います.

II 座標平面上の 3 点 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3)$ が同一直線上にあるための必要十分条件が

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

であることを証明しましょう.

解答　（必要であること）3 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) が直線 $ax + by + c = 0$ 上にあるとします．このとき

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#)$$

が成立しますが，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ も成立します．このとき $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して (#) が成立しますから

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{\$}$$

が従います．

（十分であること）逆に (\$) が成立するとします．このとき (#) を満たす $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在します．ここで，もし $a = b = 0$ とすると (#) から $c = 0$ となりますから，$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に反します．従って $a \neq 0$ または $b \neq 0$ が成立します．これは 3 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) が直線 $ax + by + c = 0$ 上にあることを意味します．

III

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+13a}{b} = \frac{a-b}{c}$$

が成立します。この式の値を 3 次の行列式を用いて求めましょう。

解答　式の値を k とします．このとき

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+13a}{b} = \frac{a-b}{c} = k$$

から

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & b & + & c & = & ka \\ 13a & & & + & c & = & kb \\ a & - & b & & & = & kc \end{array} \right. \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ -13 & k & -1 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#}$$

が従います．$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ から $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が分かりますから

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k & -1 & -1 \\ -13 & k & -1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ -13 & k & -1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -13 & k & -1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 12 \\ 0 & 1 & k+1 \end{vmatrix} \\ &= (k-1)(k+4)(k-3) \end{aligned}$$

から $k = -4, 1, 3$ が必要であることが分かります．（このとき (#) を満たす $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ を満たすとは限りませんから，十分であるかはまだ分かりません．）

$k=-4$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\#) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow a = c, b = 3c
\end{aligned}
$$

から $(\#)$ の解は

$$
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 3c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

となることが分かります．これから $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ならば $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ を満たします．よって式の値として $k=-4$ をとることが分かります.

$k=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\#) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -13 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow a = c\frac{13}{6}, b = c\frac{7}{6}
\end{aligned}
$$

から $(\#)$ の解は

$$
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{13}{6}c \\ \frac{7}{6}c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{6} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}
$$

となることが分かります．これから $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ならば $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ を満たします．よって式の値として $k=-1$ をとることが分かります.

$k=3$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\#) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow a = c, b = -4c
\end{aligned}
$$

から (#) の解は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -4c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります．これから $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ならば $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ を満たします．よって式の値として $k = 3$ をとることが分かります.

IV $A \in M_3(\mathbf{Z})$ とします。すなわち $A = (a_{ij})$ とするとき

$$a_{ij} \in \mathbf{Z}$$

が成立するとします．A が正則であると仮定すると

$$A^{-1} \in M_3(\mathbf{Z}) \Leftrightarrow |A| = \pm 1$$

が成立することを示しましょう.

解答 $(\Rightarrow)$ $A^{-1} \in M_3(\mathbf{Z})$ とすると $|A^{-1}| \in \mathbf{Z}$ であることが分かります．このとき

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |A \cdot A^{-1}| = |I_3| = 1$$

と $|A| \in \mathbf{Z}$ から $|A^{-1}| = \pm 1$ が従います.
$(\Leftarrow)$ A の余因子行列は $\tilde{A} \in M_3(\mathbf{Z})$ を満たします．このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \pm \tilde{A} \in M_3(\mathbf{Z})$$

であることが分かります.

V (1)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

を示しましょう.

(2)

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$$

を示しましょう．ただし

$$\alpha = ax + by + cz, \quad \beta = ay + bz + cx, \quad \gamma = az + bx + cy$$

とします.

解答 (1) サラスの公式で計算するのが最も簡単ではないかと思います.

(2)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

であることを用います.

VI $\mathbf{R}^3$ 中の部分空間

$$V_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^3; x - y + z = 0\}, \quad V_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^3; x + y + z = 0\}$$

を考えます。V_1 に関する鏡映を Q_1, V_2 に関する鏡映を Q_2 として

$$R = Q_1 Q_2$$

を考えます。

(1)

$$R\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$$

を示しましょう。

(2) $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ を含む $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底を求めましょう。(以下 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ とします。)

(3) $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ として、座標変換

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = P\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{smallmatrix}\right)$$

を用いて R を表しましょう。

解答　**(1)** $\vec{p}_1 \in V_1$ から $Q_1\vec{p}_1 = \vec{p}_1$ が分かります. さらに $\vec{p}_1 \in V_2$ から $Q_2\vec{p}_1 = \vec{p}_1$ が分かります. これから

$$R\vec{p}_1 = Q_1Q_2\vec{p}_1 = Q_1\vec{p}_1 = \vec{p}_1$$

が従います.

(2) V_2 の法線ベクトルを正規化して

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

とします. このとき $(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$ となります. さらに

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

と定めると $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底となります.

(3) 構成法から $\vec{p}_3 \in V_2$ であることが分かります. 従って

$$Q_2\vec{p}_2 = -\vec{p}_2, \quad Q_2\vec{p}_3 = \vec{p}_3$$

となります. 従って $Q_1\vec{p}_2$, $Q_1\vec{p}_3$ を求めれば $R\vec{p}_2$, $R\vec{p}_3$ が求まります. V_1 の法線ベクトルを

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

と定めると $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$Q_1\vec{v} = -(\vec{q}_1, \vec{v})\vec{q}_1 + (\vec{v} - (\vec{q}_1, \vec{v})\vec{q}_1) = \vec{v} - 2(\vec{q}_1, \vec{v})\vec{q}_1$$

となります．これを用いると

$$Q_1\vec{p}_2 = \vec{p}_2 - 2(\vec{q}_1, \vec{p}_2)\vec{q}_1 = \vec{p}_2 - \frac{2}{3}\vec{q}_1$$
$$Q_1\vec{p}_3 = \vec{p}_3 - 2(\vec{q}_1, \vec{p}_3)\vec{q}_1 = \vec{p}_3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\vec{q}_1$$

となります．$Q_1\vec{p}_2$，$Q_1\vec{p}_3$ を $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ の線型結合で表すためには $\vec{q}_1$ を $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ の線型結合で表す必要がありますが

$$\vec{q}_1 = (\vec{q}_1, \vec{p}_2)\vec{p}_2 + (\vec{q}_1, \vec{p}_3)\vec{p}_3 = \frac{1}{3}\vec{p}_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{p}_3$$

と求まります．これから

$$Q_1\vec{p}_2 = \vec{p}_2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{p}_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{p}_3\right) = \frac{7}{9}\vec{p}_2 - \frac{4\sqrt{2}}{9}\vec{p}_3$$
$$Q_1\vec{p}_3 = \vec{p}_3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}(\frac{1}{3}\vec{p}_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{p}_3) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}\vec{p}_2 - \frac{7}{9}\vec{p}_3$$

であることが分かります．さらに $R\vec{p}_2$，$R\vec{p}_3$ を求めると

$$R\vec{p}_2 = -Q_1\vec{p}_2 = -\frac{7}{9}\vec{p}_2 + \frac{4\sqrt{2}}{9}\vec{p}_3$$
$$R\vec{p}_3 = Q_1\vec{p}_3 = -\frac{4\sqrt{2}}{9}\vec{p}_2 - \frac{7}{9}\vec{p}_3$$

となります．以上で

$$RP = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{9} & -\frac{4\sqrt{2}}{9} \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}RP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{9} & -\frac{4\sqrt{2}}{9} \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

となります．