2020 年 10 月 09 日確認問題解答

I 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(3)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **(4)** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 17 & 27 & 19 & 5 \\ 6 & 27 & 46 & 35 & 10 \\ 4 & 19 & 35 & 30 & 10 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{vmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 = 8$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 3$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 5$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 17 & 27 & 19 & 5 \\ 6 & 27 & 46 & 35 & 10 \\ 4 & 19 & 35 & 30 & 10 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 11 & 4 \\ 0 & 3 & 11 & 14 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

II 次の行列式を計算しましょう。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ca+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-b^2+ca-ba & d^2-b^2+da-ba \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c^2-b^2+ca-ba & d^2-b^2+da-ba \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c+b+a & d+b+a \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \\
&= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\
&= (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3
\end{aligned}$$

III n 次正方行列 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n)$ において

$$v_1\vec{a}_1 + \cdots + v_n\vec{a}_n = \vec{0}, \quad v_n \neq 0$$

が成立します。このとき

$$\det(A) = 0$$

が成立することを示しましょう。

解答 $v_n \neq 0$ から

$$\vec{a}_n = -\frac{v_1}{v_n}\vec{a}_1 - \cdots - \frac{v_{n-1}}{v_n}\vec{a}_{n-1}$$

であることが分かります．これから

$$\begin{aligned} |A| &= \left|\vec{a}_1 \ \ldots \ \vec{a}_{n-1} \ \ -\frac{v_1}{v_n}\vec{a}_1 - \cdots - \frac{v_{n-1}}{v_n}\vec{a}_{n-1}\right| \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-v_j)}{v_n} |\vec{a}_1 \ \ldots \ \vec{a}_{n-1} \ \vec{a}_j| = 0 \end{aligned}$$

が従います.

IV 次の連立 1 次方程式をクラメールの公式を用いて解きましょう。z の値だけ答えれば十分です。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解答

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -9 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 0 & -11 & -5 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -11 & -5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 14 \end{aligned}$$

から $z = \dfrac{14}{-2} = -7$ であることが分かります.

V 次の行列式を計算しましょう。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 11 & 4 \\ 3 & 11 & 14 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ **(3)** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ **(4)** $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & x \end{vmatrix}$

(1)

$$\begin{vmatrix}1&3&3&1\\3&10&11&4\\3&11&14&6\\1&4&6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&3&1\\0&1&2&1\\0&2&5&3\\0&1&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&3&1\\0&1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&3&1\\0&1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

(2)

$$\begin{vmatrix}1&-1&3&0\\5&2&0&7\\0&3&-1&2\\1&1&5&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&3&0\\0&7&-15&7\\0&3&-1&2\\0&2&2&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&3&0\\0&1&-13&3\\0&3&-1&2\\0&2&2&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&3&0\\0&1&-13&3\\0&0&38&-7\\0&0&28&3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}38&-7\\28&3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}10&-10\\28&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&-1\\28&3\end{vmatrix}=310$$

(3)

$$\begin{vmatrix}3&0&5&2&-1\\1&-1&0&0&3\\0&3&-2&0&0\\0&0&1&0&0\\1&-1&0&0&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&0&2&-1\\1&-1&0&3\\0&3&0&0\\1&-1&0&7\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3&2&-1\\1&0&3\\1&0&7\end{vmatrix}$$

$$=-3\cdot 2\begin{vmatrix}1&3\\1&7\end{vmatrix}=-24$$

(4)

$$\begin{vmatrix}x&-1&0&0\\0&x&-1&0\\0&0&x&-1\\a_3&a_2&a_1&x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x&-1&0\\0&x&-1\\a_2&a_1&x\end{vmatrix}-a_3\begin{vmatrix}-1&0&0\\x&-1&0\\0&x&-1\end{vmatrix}$$

$$=x(x^3+a_2+a_1x)+a_3$$

$$=x^4+a_1x^2+a_2x+a_3$$

VI $A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-1&3&2\\-2&2&6\end{pmatrix}$ を対角化しましょう.

解答

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&2\\1&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-2&0\\1&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&0\\1&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&0\\0&\lambda-4&-2\\0&-4&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4&-2\\-4&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

から A の固有値は $\lambda=2$(重根)$,8$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda = 2 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & -1 & -2\\2 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y - 2z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+2z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

となります.

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{p_2} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

は平行でないですから，$V(2)$ は 2 次元で，$\vec{p_1}, \vec{p_2}$ が基底となります.

(ii)$\underline{\lambda = 10 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 4 & -2\\0 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\0 & 1 & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}z, \quad y = \frac{1}{2}z$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix} = \frac{z}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります. $||\vec{r_3}|| = 1$ となるように

$$\vec{p_3} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

と定めます.

ここで

$$P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})$$

と定めると P は正則行列となります. このことを示すために

$$c_1\vec{p_1} + c_2\vec{p_2} + c_3\vec{p_3} = \vec{0}$$

とします. $V(2) \oplus V(8)$ が一般論から分かりますから

$$c_1\vec{p_1} + c_2\vec{p_2} = \vec{0}, \ c_3\vec{p_3} = \vec{0}$$

が従います. $\vec{p_1} \nparallel \vec{p_2}, \vec{p_3} \neq \vec{0}$ が成立しますから

$$c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

であることが分かります．よって p が正則であることが分かります．このとき

$$Ap = (A\vec{P}_1\ A\vec{P}_2\ A\vec{P}_3) = (2\vec{P}_1\ 2\vec{P}_2\ 8\vec{P}_3) = (\vec{P}_1\ \vec{P}_2\ \vec{P}_3)\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

から

$$p^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

と対角化されます.

VII $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ に対して以下を示しましょう。

(1) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$

(2) $V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2) = \mathbf{K}^3$

(3) 各固有空間 $V(\alpha)$ に対して $\mathbf{K}^3$ から $V(\alpha)$ への射影を A で表しましょう。

解答 (1)

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 3 & 7 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda+6 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

と計算されます.

(2)

$$V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2) \subset \mathbf{K}^3$$

から

$$\dim(V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)) \leq \dim \mathbf{K}^3 = 3$$

が分かります．さらに

$$\dim V(-1), \dim V(1), \dim V(2) \geq 1$$

から

$$\dim(V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)) = \dim V(-1) + \dim V(1) + \dim V(2) \geq 3$$

が成立しますから

$$\dim(V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)) = \dim \mathbf{K}^3 = 3$$

であることが分かります．このとき

$$V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2) = \mathbf{K}^3$$

であることが分かります.

(3) $V(-1)$ への射影を P_1, $V(1)$ への射影を P_2, $V(2)$ への射影を P_3 とすると

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{(-1-1)(-1-2)}(A-I)(A-2I) = \frac{1}{6}(A-I)(A-2I)\\
P_2 &= \frac{1}{(1-(-1))(1-2)}(A+I)(A-2I) = -\frac{1}{2}(A+I)(A-2I)\\
P_3 &= \frac{1}{(2-1)(2-(-1))}(A-I)(A+I) = \frac{1}{3}(A-I)(A+I)
\end{aligned}$$

となります.

VIII $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化しましょう.

解答 まず固有多項式を求めます.

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 & 2 \\ -4 & \lambda-4 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda & 0 \\ -4 & \lambda-4 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda-4 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}\\
&= \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-8 & 2 \\ 0 & 4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-9)
\end{aligned}$$

から固有値は $\lambda = 0$(重根), 9 であることが分かります. 次に固有ベクトルを求めます.

$\lambda = 0$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y - z = 0$$

であるので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0 \text{ OR } y \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

$\lambda = 9$ のとき

$$\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

が固有ベクトルであることが分かります.

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \in V(0),\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in V(0),\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} \in V(9)$$

とすると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則となります．実際

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

とすると $V(0) \oplus V(9)$ と直和であることから

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}, \quad c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

が分かります．$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2, \vec{p}_3 \neq \vec{0}$ から

$$c_1 = c_2 = 0,\ c_3 = 0$$

が従いますから，P は正則であることが分かります．さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\vec{0}\ \vec{0}\ 9\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}$$

と A は対角化されます.

IX $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ とします。

(1) A の固有ベクトルを求めましょう.

(2) A のスペクトル分解を求めましょう．すなわち $\mathbf{K}^3$ を A の固有空間の直和に表しましょう.

(3) (2) で求めたスペクトル分解において各固有空間への射影を A で表しましょう.

解答　(1)

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\-1 & \lambda-2 & -1\\-1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 1-\lambda & 0\\-1 & \lambda-2 & -1\\-1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & \lambda-2 & -1\\-1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\0 & \lambda-3 & -1\\0 & -2 & \lambda-2\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\-2 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-4)
\end{aligned}$$

から A の固有値はが $\lambda = 1$ (重根)$, 4$ であることが分かります．次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

となります．これから

$$\dim V(1) = 2$$

が分かります.

(ii) $\underline{\lambda = 4 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0) \tag{9}$$

であることが分かります．これから

$$\dim V(4) = 1$$

が分かります.

(2)

$$V(1) \oplus V(4) \subset \mathbf{R}^3$$

において $\dim(V(1) \oplus V(4)) = \dim V(1) + \dim V(4) = 2 + 1 = 3$ が成立しますから

$$V(1) \oplus V(4) = \mathbf{R}^3$$

と $\mathbf{R}^3$ が a によってスペクトル分解できることが分かります.

(3) 任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 \in V(1), \quad \vec{v}_2 \in V(4)$$

とスペクトル分解します.

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda - 4}{1 - 4} = -\frac{1}{3}(\lambda - 4)$$

とすると

$$f_1(A)\vec{v} = f_1(A)\vec{v}_1 + f_1(A)\vec{v}_2 = f_1(1)\vec{v}_1 + f_1(4)\vec{v}_2 = 1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

から $V(1)$ への射影は $f_1(A) = -\frac{1}{3}(A - 4I_3)$ であることが分かります．他方

$$f_2(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}(\lambda - 1)$$

とすると

$$f_2(A)\vec{v} = f_2(A)\vec{v}_1 + f_2(A)\vec{v}_2 = f_2(1)\vec{v}_1 + f_2(4)\vec{v}_2 = 0 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2$$

から $V(4)$ への射影は $f_2(A) = \frac{1}{3}(A - 4I_3)$ であることが分かります.

X 2つの写像

$$f:\ X \to Y, \quad g:\ Y \to Z$$

があるとします。このとき以下を示しましょう。
(1) f と g ともに全射ならば $g \circ f$ も全射である。
(1)' f と g ともに単射ならば $g \circ f$ も単射である。
(2) $g \circ f$ が全射であるならば、g も全射である。
(3) $g \circ f$ が単射であるならば、f も単射である。

(1) 任意の $z \in Z$ をとると g が全射ですから，ある $y \in Y$ に対して $z = g(y)$ が成立します．さらに f が全射ですからある $x \in X$ に対して $y = f(x)$ が成立します．このとき

$$z = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

から $g \circ f$ が全射であることが分かる.
(1)' $x, x' \in X$ が

$$g \circ f(x) = g \circ f(x') \quad \text{すなわち} \quad g(f(x)) = g(f(x'))$$

を満たすとします．このとき g が単射であることから

$$f(x) = f(x')$$

が従います．さらに f が単射ですから，$x = x'$ が分かります．以上で $g \circ f$ が単射であることが示されました.
(2) $g \circ f$ が全射ですから，任意の $z \in Z$ に対してある $x \in X$ に対して

$$z = g \circ f(x)$$

が成立します．これを

$$z = g(f(x))$$

そして $f(x) \in Y$ と見ると g が全射であることが分かります.
(3) $x, x' \in X$ が $f(x) = f(x')$ を満たすとします．このとき

$$g(f(x)) = g(f(x')) \quad \text{すなわち} \quad g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

となります．$g \circ f$ が単射であることから $x = x'$ が従います．以上で f が単射であることが示されました.