2020 年 09 月 25 日演習問題解答

I $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$A\text{は正則} \Leftrightarrow \Phi_A(0) \neq 0$$

が成立することを証明しましょう。

解答

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1\ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2\ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3|$$

に $\lambda = 0$ を代入すると

$$\Phi_A(0) = |-\vec{a}_1\ \ -\vec{a}_2\ \ -\vec{a}_3| = (-1)^3\,|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| = -|A|$$

から

$$\Phi_A(0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A\text{は正則である}$$

ことが分かります.

II (演習 8.1)$A \in M_3(\mathbf{K})$ を $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ と列ベクトル表示をするとき

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1\ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2\ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3|$$

において各列の線型性を用いて展開して

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + c_1\lambda - \det(A)$$

において

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \lambda\,|\vec{e}_1\ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2\ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| - |\vec{a}_1\ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2\ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| \\
&= \lambda^2\,|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| - \lambda\,|\vec{e}_1\ \ -\vec{a}_2\ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| \\
&\quad - \lambda\,|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| + |\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| \\
&= \lambda^3\,|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3| - \lambda^2\,|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| - \lambda^2\,|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| + \lambda\,|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| \\
&\quad - \lambda^2\,|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3| + \lambda\,|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| + \lambda\,|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| - \lambda\,|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| \\
&= \lambda^3 - \lambda^2\left(|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3| + |\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| + |\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3|\right) \\
&\quad + \lambda\left(|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| + |\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| + |\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3|\right) - \det(A)
\end{aligned}$$

となります．さらに

$$\begin{aligned}
|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3| &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \\
|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| &= \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = a_{22} \\
|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| &= \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

であることを用いると

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + c_1\lambda - \det(A)$$

において

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が成立することが分かります．

III $\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t)$ を 3 次元ベクトルに値をとる微分可能な関数とします．このとき

$$\frac{d}{dt}\left|\vec{a}(t)\ \vec{b}(t)\ \vec{c}(t)\right| = \left|\frac{d}{dt}\vec{a}(t)\ \vec{b}(t)\ \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t)\ \frac{d}{dt}\vec{b}(t)\ \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t)\ \vec{b}(t)\ \frac{d}{dt}\vec{c}(t)\right|$$

を示しましょう．これを用いて

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + c_1\lambda - \det(A)$$

において

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\left|\vec{a}(t) \quad \vec{b}(t) \quad \vec{c}(t)\right| = \sum_{*} \varepsilon(i,j,k) \cdot a_i(t) b_j(t) c_k(t)$$

の両辺を微分するために一般化された Leibiniz の公式

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

を用います（ここで*はすべての順列 (i, j, k) に関する和であることを意味します）.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \vec{a}(t) & \vec{b}(t) & \vec{c}(t) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{*} \varepsilon(i,j,k) \cdot a_i'(t) b_j(t) c_k(t) + \sum_{*} \varepsilon(i,j,k) \cdot a_i(t) b_j'(t) c_k(t) + \sum_{*} \varepsilon(i,j,k) \cdot a_i(t) b_j(t) c_k'(t) \\
&= \begin{vmatrix} \frac{d}{dt}\vec{a}(t) & \vec{b}(t) & \vec{c}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}(t) & \frac{d}{dt}\vec{b}(t) & \vec{c}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}(t) & \vec{b}(t) & \frac{d}{dt}\vec{c}(t) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

であることが従います．この式を

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 & \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 & \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3 \end{vmatrix}$$

の両辺を λ で微分するのに用いると

$$\frac{d}{d\lambda}\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 & \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 & \vec{e}_2 & \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 & \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}$$

となります．これから

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{d}{d\lambda}\Phi_A(0) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & -\vec{a}_2 & -\vec{a}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\vec{a}_1 & \vec{e}_2 & -\vec{a}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\vec{a}_1 & -\vec{a}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{e}_2 & \vec{a}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

であることが分かります.

IV $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$\Phi_{{}^tA}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$\begin{aligned}
\Phi_{{}^tA} &= \left|\lambda I_3 - {}^tA\right| = \left|{}^t(\lambda I_3 - A)\right| \\
&= |\lambda I_3 - A| = \Phi_A(\lambda)
\end{aligned}$$

が成立します.

V(VI の準備) $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします．$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が条件

$$\alpha \neq \beta$$

を満たすとします．さらに $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, A\vec{q} = \beta\vec{q}$$
$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$$

を満たすならば、

$$\vec{p} = \vec{q} = \vec{0}$$

が成立することを証明しましょう．

解答

$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{0} \tag{1}$$

の両辺に A を掛けると

$$\alpha\vec{p} + \beta\vec{q} = \vec{0} \tag{2}$$

が，β を掛けると

$$\beta\vec{p} + \beta\vec{q} = \vec{0} \tag{3}$$

が従います．(2)−(3) から

$$(\alpha - \beta)\vec{p} = \vec{0}$$

が成立することが分かりますが，$\alpha \neq \beta$ から $\vec{p} = \vec{0}$ が従います．さらにこれを (1) に代入すると $\vec{q} = \vec{0}$ も分かります．

注意　ここでは $A \in M_3(\mathbf{K})$, $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^3$ としていますが

$$A \in M_n(\mathbf{K}), \quad \vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^n$$

でも解答はそのままです．

VI $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします．$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ が条件

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

を満たすとします．さらに $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, A\vec{q} = \beta\vec{q}, A\vec{r} = \gamma\vec{r}$$
$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0}$$

を満たすならば、

$$\vec{p} = \vec{q} = \vec{r} = \vec{0}$$

が成立することを証明しましょう．

解答 II に帰着する形で証明します.

$$\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}=\vec{0} \tag{4}$$

の両辺に A を掛けると

$$\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{0} \tag{5}$$

が，γ を掛けると

$$\gamma\vec{p}+\gamma\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{0} \tag{6}$$

が従います．(5)−(6) から

$$(\alpha-\gamma)\vec{p}+(\beta-\gamma)\vec{q}=\vec{0}$$

が成立することが分かります．ここで

$$\begin{aligned} A\cdot(\alpha-\gamma)\vec{p}=(\alpha-\gamma)A\vec{p}=(\alpha-\gamma)\alpha\vec{p}=\alpha\cdot(\alpha-\gamma)\vec{p} \\ A\cdot(\beta-\gamma)\vec{q}=(\beta-\gamma)A\vec{q}=(\beta-\gamma)\beta\vec{q}=\beta\cdot(\beta-\gamma)\vec{q} \end{aligned}$$

がら II が適用できて

$$(\alpha-\gamma)\vec{p}=(\beta-\gamma)\vec{q}=\vec{0}$$

となりますが，$\alpha\neq\gamma$, $\beta\neq\gamma$ から

$$\vec{p}=\vec{q}=\vec{0}$$

が従います．これを (4) に代入すると $\vec{r}=\vec{0}$ であることも分かります.

注意　ここでは $A\in M_3(\mathbf{K})$, $\vec{p},\vec{q},\vec{r}\in\mathbf{K}^3$ としていますが

$$A\in M_n(\mathbf{K}),\quad \vec{p},\vec{q},\vec{r}\in\mathbf{K}^n$$

でも解答はそのままです.

発展問題　$A\in M_n(\mathbf{K})$, $\vec{p}_j\in\mathbf{K}^n$ $(j=1,\ldots,\ell)$ が

$$\vec{p}_1+\cdots+\vec{p}_\ell=\vec{0}$$

$$A\vec{p}_j=\alpha_j\vec{p}_j\quad(j=1,\ldots,\ell)$$

$$\alpha_i\neq\alpha_j\quad(i\neq j)$$

を満たすとします．このとき

$$\vec{p}_1=\cdots=\vec{p}_\ell=\vec{0}$$

が成立することを ℓ に関する帰納法で証明しましょう.

VII $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\in\mathbf{R}^n$, $A=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ とします．このとき $\vec{v}\in\mathbf{R}^3$ に対して

$${}^tAA\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow A\vec{v}=\vec{0}$$

であることを示しましょう.

解答

($\Leftarrow$) $A\vec{v}=\vec{0}$ とします．この両辺に ${}^tA$ を掛けると

$$ {}^tAA\vec{v} = {}^tA\vec{0} = \vec{0} $$

が分かります.

($\Rightarrow$) ${}^tAA\vec{v}=\vec{0}$ とします．このとき

$$ ||A\vec{v}||^2 = (A\vec{v}, A\vec{v}) = ({}^tAA\vec{v}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0 $$

から $A\vec{v}=\vec{0}$ が従います.

VIII $m \times n$ 行列 A が定める線型写像

$$ f_A : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m \quad \vec{x} \mapsto A\vec{x} $$

に対して以下の (i) と (ii) を示しましょう。

(i) f_A が単射ならば $n \leq m$ が成立する。

(ii) f_A が全射ならば $n \geq m$ が成立する。

解答 (1) $A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n)$ と列ベクトル表示をします.

$$ f_A(\vec{c}) = c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n = \vec{0} $$

が成立するとします．このとき

$$ f_A(\vec{0}) = \vec{0} $$

であるので，f_A が単射ですから

$$ \vec{c} = \vec{0} \quad \text{すなわち} \quad c_1 = \cdots = c_n = 0 $$

であることが分かります．このことから

$$ \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \quad \text{は線型独立である} $$

ことが従います．これは

$$ \dim L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = n $$

を意味しますが,

$$ L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \subset \mathbf{K}^m $$

から

$$ n \leq m $$

が分かります.

$\mathbf{K}^n$ の部分空間 V, W が

$$ V \subset W $$

を満たすならば

$$ \dim V \leq \dim W $$

が成立します.

---

(2)

$$\ell := \dim L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \leq n \tag{1}$$

が成立することを用いて示します．もし

$$n < m$$

であるならば

$$\dim L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \leq n < m = \dim \mathbf{K}^m$$

となりますから

$$L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \subsetneq \mathbf{K}^m$$

となりますから，f_A が全射となりえません．

次に (1) 式を示しましょう．

$$L := L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$$

の次元が ℓ で基底が $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_\ell$ であるとします．このとき $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_\ell$ は $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ で生成されますから

$$(\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_\ell) = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n)X$$

を満たす $n \times \ell$ 行列が存在します．もし $n < \ell$ ならば

$$X\vec{c} = \vec{0}, \quad \vec{c} \neq \vec{0}$$

を満たす $\vec{c} \in \mathbf{K}^\ell$ が存在します．このとき

$$(\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_\ell)\vec{c} = \vec{0}, \ \vec{c} \neq \vec{0}$$

となりますが，これは $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_\ell$ が線型独立であることに反します．よって $\ell \leq n$ であることが分かります．

(1) 式を示す別の証明 n に関する帰納法を用います．

(i) $n = 1$ のとき

(a) $\vec{a}_1 = \vec{0}$ のとき $L = \{\vec{0}\}$ で $\dim L = 0 \leq 1 = n$ が成立します．

(b) $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ のとき $L = \mathbf{K}\vec{a}_1$ で $\dim L = 1 \leq 1 = n$ が成立します．

(n) のとき

$$\dim L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \leq n$$

が成立すると仮定します．このとき $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_\ell$ が $L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ の基底とすると

$$\ell \leq n$$

が成立します．

$(n+1)$ のとき

(a) $\vec{a}_{n+1} \in L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ のとき

$$L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1})$$

なので

$$\dim L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}) = \ell \leq n < n + 1$$

が成立します.

(b) $\vec{a}_{n+1} \notin L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ のとき $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_\ell, \vec{a}_{n+1}$ が線型独立となり[*1]

$$\dim L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}) = \ell + 1 \leq n + 1$$

となります.

[*1] この事実は基底の存在を示す定理の証明と同じ議論となります.

IX 演習 5.10（教科書 139 ページ） 次の行列 A に対して $\ker(A)$ と $\mathrm{Im}(A)$ の基底を求めましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & 6 \\ 2 & 10 & -2 & -8 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -3 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow[(ii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -21 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(iii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} &(i) && 2r+ = 1r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times (-5) \\ &(ii) && 2r\times = (-1) \\ &(iii) && 1r+ = 2r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times 3 \end{aligned}$$

を施します．この結果で得られた狭義の階段行列 B の列ベクトルに関して

$$\vec{b}_3 = -8\vec{b}_1 + 7\vec{b}_2 \tag{1}$$

が成立します．また正則行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ が存在して

$$PA = B \quad \text{従って} \quad P\vec{a}_j = \vec{b}_j\ (j = 1, 2, 3)$$

が成立します．このことから (1) の両辺に P^{-1} を掛けて

$$\vec{a}_3 = -8\vec{a}_1 + 7\vec{a}_2$$

が成立することが分かります．$\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ とすると

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3\vec{a}_3 \\ &= v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3(-8\vec{a}_1 + 7\vec{a}_2) \\ &= (v_1 - 8v_3)\vec{a}_1 + (v_2 + 7v_3)\vec{a}_2 \end{aligned}$$

から $\vec{v} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ であることが分かります．また上の行基本変形から

$$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad x\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + y\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0 \end{aligned}$$

であることが分かりますから，$\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ が線型独立であることが従います．よって $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は $\mathrm{Im}(A)$ の基底であることが示されました．

他方，上の行基本変形から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & - & 8z & = & 0 \\ & & y & + & 7z & = & 0 \end{array} \right.$$

となりますから $\ker(A)$ のベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8z \\ -7z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されます．よって $\ker(A)$ の基底として $\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ がとれます．

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & 6 \\ 2 & 10 & -2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & -9 \\ 0 & 14 & 4 & -18 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(ii)]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 14 & 4 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow[(iii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{17}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\ \vec{b}_4)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+ = 1r \times (-3),\ 3r+ = 1r \times (-2) \\ (ii) &\quad 2r\times = \frac{1}{7} \\ (iii) &\quad 1r+ = 2r \times 2,\ 3r+ = 1r \times (-14) \end{aligned}$$

を施します．この結果で得られた狭義の階段行列 B の列ベクトルに関して

$$\vec{b}_3 = -\frac{17}{7}\vec{b}_1 + \frac{2}{7}\vec{b}_2, \quad \vec{b}_4 = \frac{17}{7}\vec{b}_1 - \frac{9}{7}\vec{b}_2 \tag{2}$$

が成立します．また正則行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ が存在して

$$PA = B \quad 従って \quad P\vec{a}_j = \vec{b}_j\ (j = 1, 2, 3, 4)$$

が成立します．このことから (2) の両辺に P^{-1} を掛けて

$$\vec{a}_3 = -\frac{17}{7}\vec{a}_1 + \frac{2}{7}\vec{a}_2, \quad \vec{a}_4 = \frac{17}{7}\vec{a}_1 - \frac{9}{7}\vec{a}_2$$

が成立することが分かります．$\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ とすると

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3\vec{a}_3 + v_4\vec{a}_4 \\ &= v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3(-\frac{17}{7}\vec{a}_1 + \frac{2}{7}\vec{a}_2) + v_4(\frac{17}{7}\vec{a}_1 - \frac{9}{7}\vec{a}_2) \\ &= (v_1 - \frac{17}{7}v_3 + \frac{17}{7}v_4)\vec{a}_1 + (v_2 + \frac{2}{7}v_3 - \frac{9}{7}v_4)\vec{a}_2 \end{aligned}$$

から $\vec{v} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ であることが分かります．また上の行基本変形から

$$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad x\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + y\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0 \end{aligned}$$

であることが分かりますから，$\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ が線型独立であることが従います．よって $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は $\mathrm{Im}(A)$ の基底であることが示されました．

他方，上の行基本変形から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \ker(A) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{cccccccc} x & & - & \frac{17}{7}z & + & \frac{17}{7}w & = & 0 \\ & y & + & \frac{2}{7}z & - & \frac{9}{7}w & = & 0 \end{array} \right.$$

となりますから $\ker(A)$ のベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7}z - \frac{17}{7}w \\ -\frac{2}{7} + \frac{9}{7}w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \frac{z}{7} \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{w}{7} \begin{pmatrix} -17 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

と表されます．よって $\ker(A)$ は $\left(\begin{smallmatrix} 17 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix} -17 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ で生成されます．さらに

$$c_1 \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{smallmatrix} -17 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

とすると，この左辺は $\left(\begin{smallmatrix} * \\ \\ 7c_1 \\ 7c_2 \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$ となりますから $c_1 = c_2 = 0$ が分かります．よって $\left(\begin{smallmatrix} 17 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix} -17 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ は線型独立であることも分かります．以上から $\left(\begin{smallmatrix} 17 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix} -17 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ は $\ker(A)$ の基底であることが示されました．