2020 年 7 月 3 日演習問題

I A が対称な正則行列とします．このとき A^{-1} も対称行列であることを示しましょう．

解答 $AA^{-1} = I_n$ の両辺の転置をとると

$$^t\left(A^{-1}\right)\,^tA = I_n$$

となります．A は対称ですから $^tA = A$ が成立します．よって

$$^t\left(A^{-1}\right) A = I_n$$

が従います．この両辺に右から A^{-1} を掛けると

$$^t\left(A^{-1}\right) = A^{-1}$$

であることが分かります．よって A^{-1} は対称行列です．

II 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \quad \gamma \\ 0 & \\ 0 & \raisebox{1ex}{B} \end{pmatrix}$$

に対して A が正則であるための必要十分条件が

$$\alpha \neq 0 \quad \text{かつ} \quad |B| \neq 0$$

であることを示しましょう（3 次の行列式は用いてはいけません）．

一般に $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$A\text{が正則} \quad \Leftrightarrow \quad \left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}\right)$$

が成立することを用います．
A が正則であると仮定します. このとき $\alpha = 0$ ならば

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \quad \gamma \\ 0 & \\ 0 & \raisebox{1ex}{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$$

となりますから A が正則であることに反します．よって $\alpha \neq 0$ でることが分かります．次に $|B| = 0$ であるとします．このとき

$$B\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}, \quad \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

を満たす $\left(\begin{smallmatrix}y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{K}^2$ が存在します．ここで

$$x = -\frac{1}{\alpha}(\beta y + \gamma z)$$

と定めると

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}, \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が従います．これは A が正則であることに反します．よって $|B| \neq 0$ であることが分かります．
<u>$\alpha \neq 0$ かつ $|B| \neq 0$ であると仮定します.</u> $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ が成立するとします．この条件は

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad \text{かつ} \quad B\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が成立することに注意します．まず $|B| \neq 0$ から $y = z = 0$ であることが分かります．さらに

$$\alpha x = -\beta y - \gamma z = 0$$

から $x = 0$ も従います．よって

$$A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

となりますから A は正則です.

III 掃き出し法を用いて

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めましょう。

解答

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & b-ac & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

から

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が分かります．上で

$$\begin{aligned} &(1) \quad 1r+ = 2r \times (-a) \\ &(2) \quad 1r+ = 3r \times (ac-b), \quad 2r+ = 3r \times (-c) \end{aligned}$$

を用いています.

IV

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

とする．$L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ の基底を一つ求めて，$\dim L$ を求めましょう.

解答

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 2\\ 3 & -9 & 3 & 6\\ 2 & 4 & 0 & -2\\ 1 & -13 & 3 & 8\end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 10 & -2 & -6\\ 0 & -10 & 2 & 6\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 10 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 2 & 6\end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 10 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}\ \vec{\delta})$$

と $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})$ を行基本変形します．このとき

$$\vec{\gamma} = \frac{2}{5}\vec{\alpha} - \frac{1}{5}\vec{\beta},\ \vec{\delta} = \frac{1}{5}\vec{\alpha} - \frac{3}{5}\vec{\beta}$$

が成立します．列の 1 次関係は行基本変形で不変ですから

$$\vec{c} = \frac{2}{5}\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b},\ \vec{d} = \frac{1}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$$

が成立することが分かります．任意の $\vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ に対して

$$\begin{aligned}\vec{v} &= x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + w\vec{d}\\ &= \left(x + \frac{2}{5}z + \frac{1}{5}w\right)\vec{a} + \left(y - \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}w\right)\vec{b}\end{aligned}$$

から $\vec{a}, \vec{b}$ が $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ を生成します．さらに，上の行基本変形で

$$(\vec{a}\ \vec{b}) \to \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

から

$$x\vec{a} + y\vec{a} = \vec{0}\ \Rightarrow x = y = 0$$

が分かります．従って $\vec{a}, \vec{b}$ は 1 次独立であることが分かります．

以上で $\vec{a}, \vec{b}$ は $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ の基底であることが分かります．よって

$$\dim L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = 2$$

であることが示されました．

V $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ は線型独立とする．このとき以下のベクトルが $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ の基底となることを示しましょう．

(1) $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(2) $\vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}, \vec{a} + \vec{b}$

解答

(1)

$$\vec{\alpha}=\vec{a},\ \vec{\beta}=\vec{a}+\vec{b},\ \vec{\gamma}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

とすると

$$\begin{pmatrix}\vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

と表現できる．このとき行基本変形

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

から

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ \text{は正則で}\ P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

であることが分かる．

$$\begin{pmatrix}\vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

とすると $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が線型独立であるから

$$\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\text{から}\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

が従う．さらに P が正則なので $\xi=\eta=\zeta=0$ が従うので，$\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ は線型独立であることが分かります．

さらに任意の $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ に対して

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

と表されるので $\vec{v}\in L(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$ が従う．よって $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ が $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ を生成することが分かる．以上で $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ は $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ の基底となることが示されました．

(2)

$$\vec{\alpha}=\vec{b}+\vec{c},\ \vec{\beta}=\vec{a}+\vec{c},\ \vec{\gamma}=\vec{a}+\vec{b}$$

とすると

$$\begin{pmatrix}\vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

と表現できる．このとき行基本変形

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

から

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\ \text{は正則で}\ P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

であることが分かる．

$$\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

とすると $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が線型独立であるから

$$\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\text{から}\quad\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

が従う．さらに P が正則なので $\xi=\eta=\zeta=0$ が従うので，$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ は線型独立であることが分かります．

さらに任意の $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ に対して

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

と表されるので $\vec{v}\in L(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$ が従う．よって $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ が $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ を生成することが分かる．以上で $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ は $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ の基底となることが示されました．

VI $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{K}^n$ は線型独立とします．

(1)

$$\vec{\alpha}=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c},\ \vec{\beta}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\ \vec{\gamma}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$$

で定める $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ が $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ の基底となることを示しましょう．

(2) $L=L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ とするとき基底 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ による L の座標を $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，基底 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ による L の座標を $\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$ とするとき，双方を他方で表しましょう．

解答

(1)

$$\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

と表現できる．このとき行基本変形

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

から

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ は正則で } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

であることが分かる．

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

とすると $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が線型独立であるから

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が従う．さらに P が正則なので $\xi = \eta = \zeta = 0$ が従うので，$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ は線型独立であることが分かります．

さらに任意の $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ に対して

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表されるので $\vec{v} \in L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ が従う．よって $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ が $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ を生成することが分かる．以上で $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ は $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ の基底となることが示されました．

(2) $\vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ が

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

と表されるとき,

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

であることを用いると

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

が成立します．$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が線型独立ですから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

となります．この両辺に P^{-1} を掛けると

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

となります．

VII 狭義の階段行列

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と 3 次の正則行列 P があって，PA_0 も狭義の階段行列になるとします．このとき $PA_0 = A_0$ が成立することを示しましょう．（狭義の階段行列を標準形とするときの一意性）

解答 $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ と列ベクトル表示をします．このとき

$$PA_0 = \begin{pmatrix} \vec{0}\ \vec{p}_1\ \alpha\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ *\ \vec{p}_3 \end{pmatrix}$$

となります．P が正則ですから $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ となりますが，PA_0 が狭義の階段行列であることから

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となります．よって

$$PA_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & & & \\ 0 & 0 & 0 & \vec{p}_2 & * & \vec{p}_3 \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

となります．$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$ で PA_0 が狭義の階段行列であることから

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となります．よって

$$PA_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 & \beta & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma & \vec{p}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

となります．$\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると P が正則でなくなります．よって PA_0 が狭義の階段行列であることから

$$\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．以上で $P = I_3$ 従って

$$PA_0 = A_0$$

であることが従います.