$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ に対して $\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)$

$=\lambda I_2-A$ ← $\lambda=5$ を代入

-1

固有値は $\lambda=5,-1$.

$\lambda=5$ のとき　$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}4&-2\\-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\iff 2x-y=0$

$\Leftarrow$ $(5I_2-A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}$

$-4x+2y=0$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $(x\neq 0)$ が固有ベクトル ← $\neq\vec{0}$.

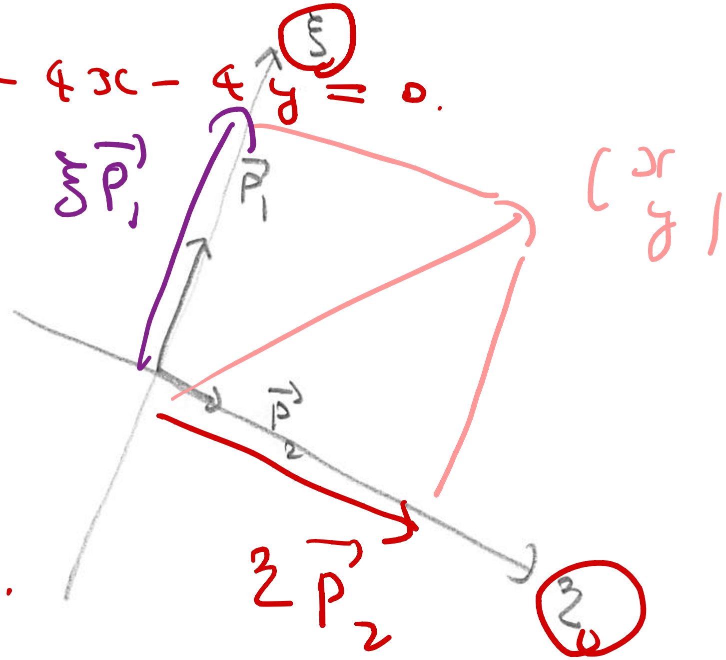
$\lambda=-1$ のとき　$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-2&-2\\-4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\iff x+y=0$

$-4x-4y=0.$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $(x\neq 0)$

$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{p}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $P=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ として $=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$ 正則となる。

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix}$



変数変換　$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\xi\vec{p}_1+\eta\vec{p}_2$
$=P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$

を行うことになる。

②

$$\boxed{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + 3y(t). \end{cases}$$

を考える

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

とすると

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = P^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$$

示せるか？

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\xi(t) \\ -\eta(t) \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{bmatrix} \xi(t) = \xi(0)e^{5t} \\ \eta(t) = \eta(0)e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \boxed{P\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}P^{-1}}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{\ell!}t^{\ell}A^{\ell}$$

$$\boxed{\exp tA = P\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}P^{-1}}$$

については補足ビデオを作る予定

$$f'(t) = a f(t) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(f(t)e^{-at}\right)' = f'(t)\cdot e^{-at} + f(t)\cdot\left(e^{-at}\right)'$$

$$= af(t)\cdot e^{-at} + f(t)\left(-ae^{-at}\right)$$

$$\equiv 0$$

$$f(t)e^{-at} \equiv C \text{ 定数}$$

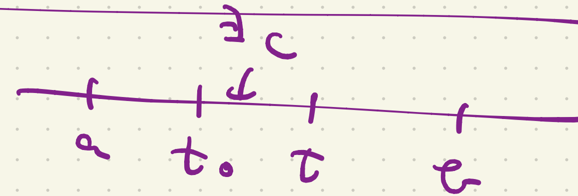
$t=0$ を代入 $f(0) \equiv C$

$$f(t) = f(0)e^{at}.$$

$$g'(t) \equiv 0 \longrightarrow g(t) = \text{定数}.$$

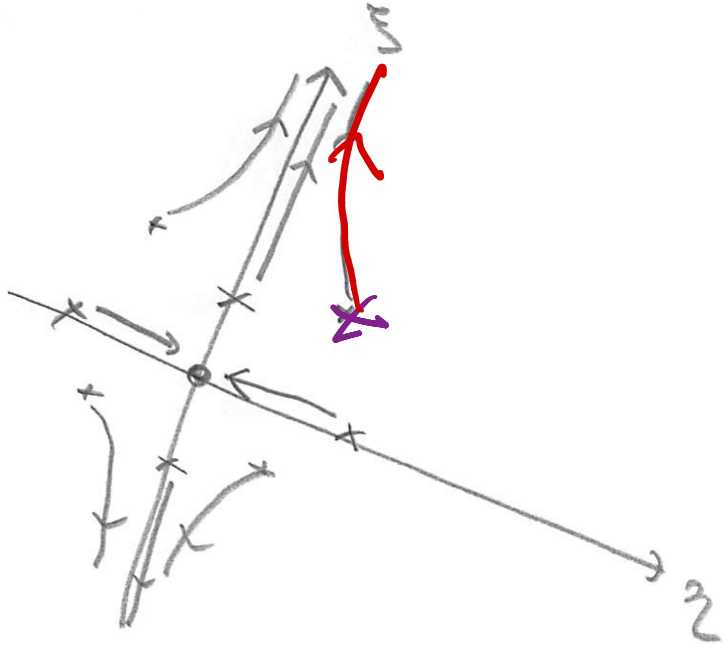
g : (a, b) 上 微分可能

$$\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$$



$$= g'(c) = 0.$$

$$g(t) = g(t_0) \quad (t \neq t_0)$$



$\xi(t) = \xi(0)\, e^{5t}$

$\zeta(t) = \zeta(0)\, e^{-t}$.

Phase Diagram.

位相図

に注意しよう。

L04 演習問題 I, II がある

注) $A \in M_2(\mathbb{R})$ の固有値 α, β が実でない場合も重要である。(恐らく後期の講義で解説する)