2020 年 6 月 12 日ハンドアウト

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\begin{pmatrix}9\\10\\-1\end{pmatrix}$$

とします．また $\mathbf{R}^3$ 中に

$$L := L(\vec{a},\vec{b}) = \{x\vec{a}+y\vec{b};\ x,y\in\mathbf{R}\}$$

を定めます.

(1) $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ を示しましょう．　**(2)** $\vec{p},\vec{q}\in L$ を示しましょう.

(3) $\vec{a},\vec{b}$ を用いて L 上に座標 $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ を (3) を用いて定義します．他方 $\vec{p},\vec{q}$ を用いて L 上に座標 $\left(\begin{smallmatrix}\xi\\\eta\end{smallmatrix}\right)$ を (3) を用いて定義します

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}\quad(\vec{v}\in L) \tag{3}$$

2 つの座標系の間の関係式を求めましょう.

解答 (1) $\vec{a},\vec{b}$ の第 1 成分と第 2 成分を用いて

$$\begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

となりますから $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ であることが分かります.

(2) 行基本変形

$$\begin{pmatrix}1&3&1&9\\2&2&0&10\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\overset{(i)}{\to}\begin{pmatrix}1&3&1&9\\0&-4&-2&-8\\0&4&2&8\end{pmatrix}$$
$$\overset{(ii)}{\to}\begin{pmatrix}1&3&1&9\\0&1&\frac{1}{2}&2\\0&4&2&8\end{pmatrix}\overset{(iii)}{\to}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&3\\0&1&\frac{1}{2}&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

を用います（ここで行基本変形

$$(i)2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r$$
$$(ii)2r\times=\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$(iii)1r+=2r\times(-3),\ 3r+=2r\times(-4)$$

を用いました）．行基本変形で列ベクトルの間の線型関係が保たれることに注意します．最後の行列 B を $B=(\vec{a}_2\ \vec{b}_2\ \vec{p}_2\ \vec{q}_2)$ と列ベクトル表示すると

$$\vec{p}_2=-\frac{1}{2}\vec{a}_2+\frac{1}{2}\vec{b}_2,\quad \vec{q}_2=3\vec{a}_2+2\vec{b}_2$$

が成立しますから

$$\vec{p}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\quad \vec{q}=3\vec{a}+2\vec{b}$$

が成立します．これは $\vec{p},\vec{q}\in L$ を意味します.

補足 1 一般に $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{K}^n$ が $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ を満たすとします．このとき

$$\vec{p},\vec{q}\in L=L(\vec{a},\vec{b})$$

に対して

$$\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b},\ \vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}$$

と表すと

$$\boxed{\vec{p}\nparallel\vec{q}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\neq 0}$$

となります．このことを示すために

$$(\vec{p}\ \vec{q})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$$

と表現します．$\left|\begin{smallmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{smallmatrix}\right|\neq 0$ が成立するとき

$$(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

とすると，

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

が従います．$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ が成立していますから

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

となります．いま $\left|\begin{smallmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{smallmatrix}\right|\neq 0$ ですから $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\vec{0}$ であることが分かります．これは $\vec{p}\nparallel\vec{q}$ であることを意味します．次に $\left|\begin{smallmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{smallmatrix}\right|=0$ であるとします．このときある $\left(\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right)\neq\vec{0}$ に対して

$$\left(\begin{smallmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right)=\vec{0}$$

となります．これから

$$(\vec{p}\ \vec{q})=(\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{smallmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right)=\vec{0}$$

から $\vec{p}\parallel\vec{q}$ が従います．

　問題の状況で

$$(\vec{p}\ \vec{q})=\left(\vec{a}\ \vec{b}\right)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 3\\ \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & 3\\ \frac{1}{2} & 2\end{vmatrix}=-\frac{5}{2}\neq 0$$

から $\vec{p}\nparallel\vec{q}$ であることが分かります．

補足 2 一般に $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$\boxed{\vec{p},\vec{q}\in L(\vec{a},\vec{b})\Rightarrow\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\in L(\vec{a},\vec{b})}$$

が成立します．実際

$$\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b},\ \vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}$$

と表すと

$$\begin{aligned}\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}&=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\\ &=(\lambda x_1+\mu x_2)\vec{a}+(\lambda y_1+\mu y_2)\vec{b}\in L(\vec{a},\vec{b})\end{aligned}$$

と示せます．これを用いると

$$L(\vec{p},\vec{q})=\{\xi\vec{p}+\eta\vec{q};\ \xi,\eta\in\mathbf{R}\}\subset L(\vec{a},\vec{b})$$

であることが分かります．ここで

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\neq 0$$

を仮定します．このとき

$$(\vec{a}\ \vec{b})=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}^{-1}$$

が成立しますから $\vec{a},\vec{b}\in L(\vec{p},\vec{q})$ が分かります．$L(\vec{p},\vec{q})$ も足し算とスカラー倍について閉じていますから

$$L(\vec{a},\vec{b})\subset L(\vec{p},\vec{q})$$

であることが分かります．以上で

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow L(\vec{p},\vec{q})=L(\vec{a},\vec{b})$$

が示されました．

補足 3 上で以下を示したことになります．

定理 $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{R}^n$ が $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ を満たすとします．$\vec{p},\vec{q}\in L(\vec{a},\vec{b})$ に対して

$$\vec{p}\nparallel\vec{q}\Rightarrow L(\vec{p},\vec{q})=L(\vec{a},\vec{b})$$

これを以下のようにも示せます．

$$L(\vec{p},\vec{q})\subsetneq L(\vec{a},\vec{b})$$

とするとある $\vec{r}\in L(\vec{a},\vec{b})$ が

$$\vec{r}\notin L(\vec{p},\vec{q})$$

を満たします．このとき $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ は線型独立になります．実際

$$c_1\vec{p}+c_2\vec{q}+c_3\vec{r}=\vec{0}$$

を仮定します．$c_3\neq 0$ とすると

$$\vec{r}=-\frac{c_1}{c_3}\vec{p}-\frac{c_2}{c_3}\vec{q}\in L(\vec{p},\vec{q})$$

となりますが，これはあり得ません．よって $c_3=0$ となり，さらに $c_1\vec{p}+c_2\vec{q}=\vec{0}$ から $c_1=c_2=0$ が従います．

他方，$L(\vec{a},\vec{b})$ に 3 本の線型独立なベクトルは存在しえません（講義で証明済み）．よって $L(\vec{p},\vec{q})\subsetneq L(\vec{a},\vec{b})$ はあり得ませんから $L(\vec{p},\vec{q})=L(\vec{a},\vec{b})$ であることが分かります．

(3) (2) の補足から

$$L(\vec{a},\vec{b}) = L(\vec{p},\vec{q})$$

であることが分かります．また $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ から

$$x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\xi\vec{p} + \eta\vec{q} = \xi'\vec{p} + \eta'\vec{b} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$$

が従います.

（ここから解答）上で示しましたが

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

が成立します．これから

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{p}\ \vec{q}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

が従います.