行列式と正則性・クラメールの公式

n次正方行列
$$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$$
に対して i行とj列を除いた$(n-1)$次正方行列を

$$A_{ij}$$

と言した。さらに

$$\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

をAの(i,j)余因子とした。

ここでAの余因子行列$\tilde{A}$を

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \cdots & \tilde{A}_{n1} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{1n} & \tilde{A}_{2n} & \cdots & \tilde{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

と定める。

定理 $\tilde{A}\,A = A\cdot\tilde{A} = |A|\cdot I_n$

系 $|A| \neq 0$ ならば A は正則で $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$

注 系の逆が次の定理である

定理 A が正則ならば $|A| \neq 0$.

証明 $A\,A^{-1} = I_n$

の両辺の行列式をとると

$$|A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}|$$

$$\| \quad$$

$$|I_n| = 1$$

から $|A| \neq 0$

前期に

$$\text{(i)}\ A\text{が正則} \iff \text{(ii)}\ \left(A\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}\right)$$

を示したが、以下で

$$\text{(i)}\ A\text{が正則} \iff \text{(ii)}\ \left(A\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{(iii)}\ |A| \neq 0$$

を示した.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) は以下示す. クラメールから従う.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) は はき出し法を用いて示す.

対偶 Not(iii) $\Rightarrow$ Not(ii)

クラメールの公式. $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \in M_n(\mathbb{K})$, $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ とする.

$|A| \neq 0$ ならば $A\vec{x} = \vec{b}$ の解 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ は

$$x_j = \frac{|\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_{j-1}\ \vec{b}\ \vec{a}_{j+1} \cdots \vec{a}_n|}{|A|}$$

となる.

(証明) $A\vec{x} = \vec{b}$ とすると $x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_{j-1}\vec{a}_{j-1} + x_j\vec{a}_j + x_{j+1}\vec{a}_{j+1} + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$

$$|\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_{j-1}\ \vec{b}\ \vec{a}_{j+1} \cdots \vec{a}_n|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k |\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_{j-1}\ \vec{a}_k\ \vec{a}_{j+1} \cdots \vec{a}_n|$$

$$= x_j |\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_{j-1}\ \vec{a}_j\ \vec{a}_{j+1} \cdots \vec{a}_n| = x_j |A|$$

系　$|A| \neq 0$ のとき $\left(A\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{x} = \vec{0} \right)$

証明

$$x_j = \frac{1}{|A|} \left| \vec{a}_1 \cdots \vec{a}_{j-1} \ \vec{0} \ \vec{a}_{j+1} \cdots \vec{a}_n \right| = 0$$

$$(j = 1, \cdots, n)$$

定理 $|A| = 0 \implies \left(\exists \vec{x} \neq \vec{0} \quad A\vec{x} = \vec{0} \right)$

(i) $\vec{a}_1 = \vec{0}$ のとき $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$

(ii) $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ のとき $\exists P$ 正則 $PA = \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array} \right)$ ← 前回で示したつもり

$$\begin{array}{l} |PA| = |P| \cdot |A| = 0 \\ \ \ \, \parallel \\ \ |B| \end{array}$$

から $|B| = 0$ となる。次元の帰納法により $\exists \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \vec{0} \left(B \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$

さらに

$$\left(A\vec{x} = \vec{0} \right) \underset{P\text{正則}}{\iff} \left(\begin{array}{l} x_1 + *_2 x_2 + \cdots + *_n x_n = 0 \\ B \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0} \end{array} \right)$$

従って $x_1 = -*_2 x_2 - \cdots - *_n x_n$ とすればよい。