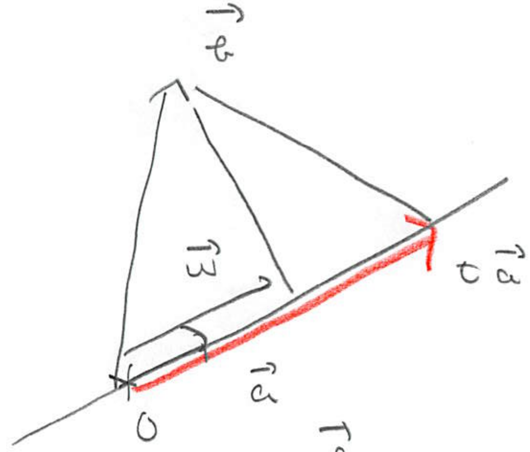
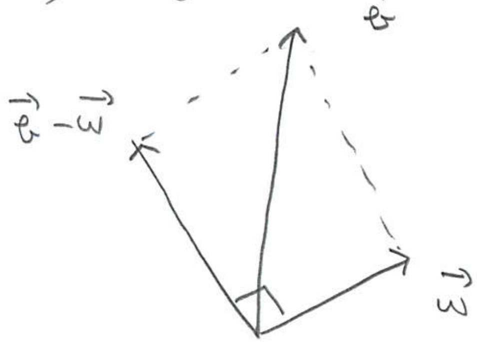
$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ とする



$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$

$$\begin{cases} \vec{w} = t\vec{a} \\ \vec{b} - t\vec{a} \perp \vec{a} \end{cases}$$



$t = t_0 := \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}$ となる.

注 このとき $\|\vec{b} - t\vec{a}\|^2$ は最小となる.

$$\|\vec{b} - t\vec{a}\|^2 = \|\vec{b} - t_0\vec{a} + (t - t_0)\vec{a}\|^2$$

$$= \|\vec{b} - t_0\vec{a}\|^2 + (t - t_0)^2\|\vec{a}\|^2$$

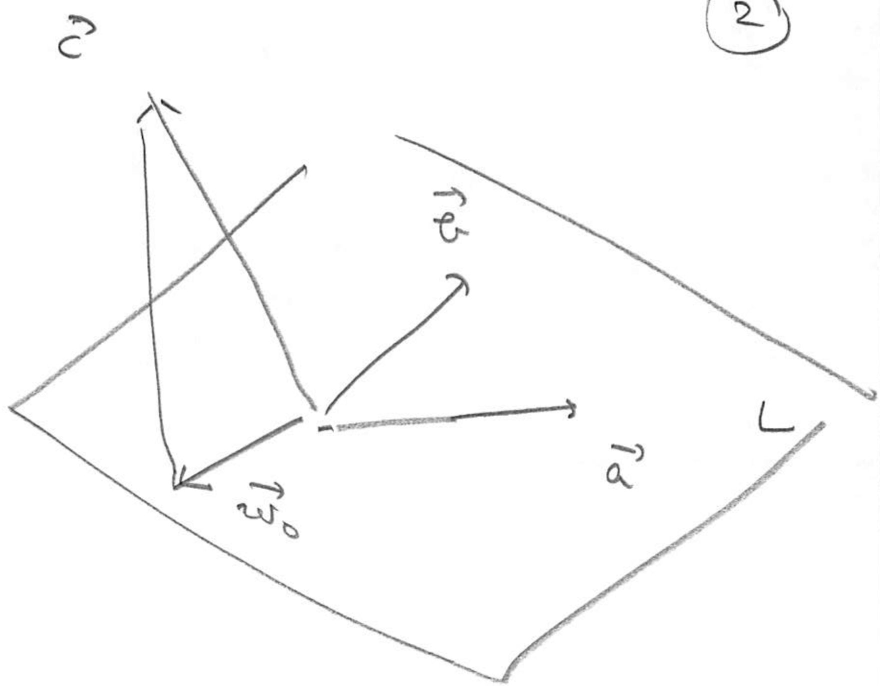
注

$$\geq \|\vec{b} - t_0\vec{a}\|^2$$

$=$ $\Longleftrightarrow$ $t = t_0$

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ とする, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$

$$L = L(\vec{a}, \vec{b}) = \{ x\vec{a} + y\vec{b} \,;\, x, y \in \mathbb{R} \}$$



$\vec{v} \in L$ に対して

$$\| \vec{c} - \vec{v} \|^2$$

を最小にする

$$\begin{cases} \vec{w}_0 \in L, \\ \vec{c} - \vec{w}_0 \perp L \quad (\forall \vec{v} \in L \ \ (\vec{c} - \vec{w}_0, \vec{v}) = 0) \end{cases}$$

($\vec{w}_0$ を $\vec{c}$ の L への直交射影と呼ぶ).

$$\| \vec{c} - \vec{v} \|^2 = \| \vec{c} - \vec{w}_0 + \vec{w}_0 - \vec{v} \|^2$$

注 → $$= \| \vec{c} - \vec{w}_0 \| + \| \vec{w}_0 - \vec{v} \|^2 \geqq \| \vec{c} - \vec{w}_0 \|^2$$

$$\Updownarrow$$

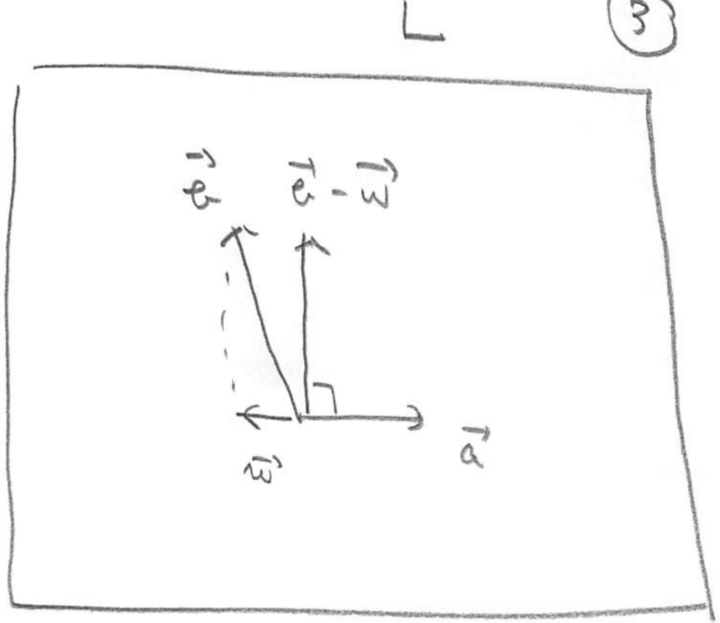
$$\vec{v} = \vec{w}_0$$

少し難しい. (演習問題)

$\vec{w_0}$ を求める　（別の方法は §2 9-4）

$\vec{w}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影とする

$\vec{b}-\vec{w} \neq \vec{0}$ に注意しよう（$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ の下で）



$$
\begin{cases}
\vec{p} = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \\[2ex]
\vec{q} = \dfrac{1}{\|\vec{b}-\vec{w}\|}(\vec{b}-\vec{w})
\end{cases}
$$

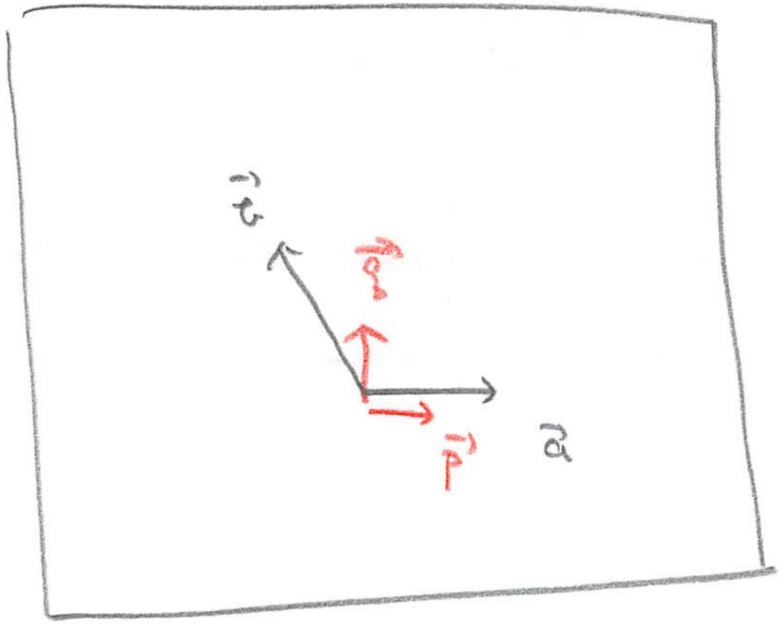
は L の正規直交基底.

$\|\vec{p}\| = \|\vec{q}\| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = 0$

発展問題

L の正規直交基底を $\vec{p}, \vec{q}$ を用いて表せ（もう少し準備が必要）

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r] & L & \\
\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] \arrow[ddr, leftrightarrow, "?"'] & x\vec{a}+y\vec{b} & \\
& \xi\vec{p}+\eta\vec{q} \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] & \\
& \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \arrow[u, mapsto] & \mathbb{R}^2 \arrow[uuul, bend right]
\end{tikzcd}
$$



$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$の関係は？（[illegible]で…）

$\vec{w}_0$を求める.

$$\vec{w}_0 = \xi_0 \vec{p} + \eta_0 \vec{q} \text{ とする}$$

$$\vec{c} - \vec{w}_0 \perp L \iff (\vec{c} - \vec{w}_0, \vec{p}) = (\vec{c} - w_0, \vec{q}) = 0.$$

ここは？

$$0 = (\vec{c} - \xi_0 \vec{p} - \eta_0 \vec{q}, \vec{p}) = (\vec{c}, \vec{p}) - \xi_0 (\vec{p}, \vec{p}) - \eta_0 (\vec{q}, \vec{p})$$
$$= (\vec{c}, \vec{p}) - \xi_0$$

$$0 = (\vec{c} - \xi_0 \vec{p} - \eta_0 \vec{q}, \vec{q}) = (\vec{c}, \vec{q}) - \xi_0 (\vec{p}, \vec{q}) - \eta_0 (\vec{q}, \vec{q})$$
$$= (\vec{c}, \vec{q}) - \eta_0$$

従って

$$\boxed{\vec{w} = (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q}}$$

この意味を $\mathbb{R}^3$ の時に説明できるか？