第 5 講義 05 月 29 日　演習問題解答

I 以下の関数 $f(x,y)$ が $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0$ を満たすことを示しましょう.
(1) $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} \quad ((x,y) \neq (0,0))$
(2) $f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$

解答 (1)

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \\
f_y &= \frac{y}{x^2+y^2} \\
f_{xx} &= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
f_{yy} &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

から

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

であることが分かります.

(2) $(\tan^{-1} t)' = \frac{1}{1+t^2}$ を用います.

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} \\
f_{xx} &= (-y)\cdot\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
f_y &= \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \\
f_{yy} &= x\cdot\left(-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

から

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

であることが分かります.

II $\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上で C^2 級の $z = f(x,y)$ に対して

$$F(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad ((r\cos\theta, r\sin\theta) \in U, r > 0)$$

を定義します（極座標変換）. このとき

$$\Delta z := z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r}z_r + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$
\begin{aligned}
z_r &= f_x\cdot\cos\theta + f_y\cdot\sin\theta \\
z_{rr} &= \cos\theta\cdot(f_{xx}\cdot\cos\theta + f_{xy}\cdot\sin\theta) + \sin\theta\cdot(f_{yx}\cdot\cos\theta + f_{yy}\cdot\sin\theta) \\
&= f_{xx}\cdot\cos^2\theta + 2f_{xy}\cdot\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\cdot\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_\theta &= f_x \cdot (-r\sin\theta) + f_y \cdot r\cos\theta \\
z_{\theta\theta} &= (-r\sin\theta)\cdot\left(f_{xx}\cdot(-r\sin\theta) + f_{xy}\cdot r\cos\theta\right) + r\cos\theta\cdot\left(f_{yx}\cdot(-r\sin\theta) + f_{yy}\cdot r\cos\theta\right) \\
&\quad + f_x\cdot(-r\cos\theta) + f_y\cdot(-r\sin\theta) \\
&= r^2\left(f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\cos^2\theta\right) - r(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \\
&= r^2\left(f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\cos^2\theta\right) - rz_r
\end{aligned}
$$

となりますから

$$
\begin{aligned}
z_{rr} + \frac{1}{r}z_r + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} &= f_{xx}\cdot\cos^2\theta + 2f_{xy}\cdot\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\cdot\sin^2\theta \\
&\quad + \frac{1}{r}z_r + f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\cos^2\theta - \frac{1}{r}z_r \\
&= f_{xx}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + f_{yy}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\
&= f_{xx} + f_{yy}
\end{aligned}
$$

が従います.

注意 逆向きに座標変換をして問題を考えましょう.

III 問題 II の状況で

$$
(z_x)^2 + (z_y)^2 = (z_r)^2 + \frac{1}{r^2}(z_\theta)^2
$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$
\begin{aligned}
(z_r)^2 + \frac{1}{r^2}(z_\theta)^2 &= (f_x\cdot\cos\theta + f_y\cdot\sin\theta)^2 + \frac{1}{r^2}\left(f_x\cdot(-r\sin\theta) + f_y\cdot r\cos\theta\right)^2 \\
&= f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xx}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta \\
&\quad + f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xx}\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\cos^2\theta \\
&= (f_x)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (f_y)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\
&= (f_x)^2 + (f_y)^2
\end{aligned}
$$

IV $\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上で定義された関数 $f(x,y)$ が与えられているとします．他方 U の中に C^2 級の曲線 $(x(t),y(t))$ が与えられているとします．このとき

$$F(t) := f(x(t),y(t))$$

を定義します．このとき

$$F''(t) := \left(H(f)(x(t),y(t))\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right) + \left(\nabla(f)(x(t),y(t)), \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}\right)$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$F'(t) = f_x((x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_y((x(t),y(t)) \cdot y'(t)$$

をもう一度 t で微分すると

$$\begin{aligned}
F''(t) &= \big(f_{xx}((x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_{xy}((x(t),y(t)) \cdot y'(t)\big) \cdot x'(t) + f_x((x(t),y(t)) \cdot x''(t) \\
&\quad + \big(f_{yx}((x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_{yy}((x(t),y(t)) \cdot y'(t)\big) \cdot y'(t) + f_y((x(t),y(t)) \cdot y''(t) \\
&= f_{xx}((x(t),y(t)) \cdot (x'(t))^2 + 2f_{xy}((x(t),y(t)) \cdot x'(t)y'(t) + f_{yy}((x(t),y(t)) \cdot (y'(t))^2 \\
&\quad + f_x((x(t),y(t)) \cdot x''(t) + f_y((x(t),y(t)) \cdot y''(t) \\
&= \left(\begin{pmatrix} f_{xx}((x(t),y(t)) & f_{xy}((x(t),y(t)) \\ f_{yx}((x(t),y(t)) & f_{yy}((x(t),y(t)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} f_x((x(t),y(t)) \\ f_y((x(t),y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(H(f)(x(t),y(t))\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right) + \left(\nabla(f)(x(t),y(t)), \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

V 理想気体の状態方程式は

$$pV = RT$$

である．ここで p は圧力，V は体積，T は温度，R は気体定数です．状態方程式の下で $p = \frac{RT}{V}$, $V = \frac{RT}{p}$, $T = \frac{pV}{R}$ と 3 個の変量 p,V,T はそれぞれ他の変量の関数となることに注意します．ここでエントロピーを

$$S := a\log T + R\log V + b$$

によって定数 a,b を用いて定義します．このとき

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

が成立することを示しましょう．ここで $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$ は S を V,T の関数と考えて V で偏微分するという記号です．

解答

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = 0 + R\frac{1}{V} + 0 = \frac{R}{V}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial (RT/V)}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V}$$

から

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

であることが分かります．他方

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T &= 0 + R \cdot \frac{1}{V} \cdot \left(\frac{\partial (RT/p)}{\partial p}\right)_T + 0 \\ &= \frac{R}{V} \cdot \left(-\frac{RT}{p^2}\right) = \frac{R}{V} \cdot \left(-\frac{V}{p}\right) = -\frac{R}{p}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial (RT/p)}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$$

から

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

が成立することが分かります．

VII 第 1 象限

$$\mathbf{R}^2_{++} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x, y > 0\}$$

の上で定義されている関数は

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y) \quad (t > 0,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

が成立するとき λ 斉次であるといいます．

(1) この状況で，さらに f が $\mathbf{R}^2_{++}$ で C^1 級ならば

$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = \lambda f(x, y) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2_{++}) \tag{EQ}$$

が成立することを示しましょう．

(2) 逆に $\mathbf{R}^2$ 上で C^1 級の f が (EQ) を満たすならば f は λ 次斉次であることを示しましょう．

解答 (1)

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y) \quad (t > 0,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

の両辺を t で微分すると

$$f_x(tx, ty) \cdot x + f_y(tx, ty) \cdot y = \lambda t^{\lambda-1} f(x, y) \quad (t > 0,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

となります．これに $t = 1$ を代入すると

$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = \lambda f(x, y) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2_{++}) \tag{EQ}$$

となります．

(2)

$$\begin{aligned}\Big(t^{-\lambda}f(tx,ty)\Big)' &= -\lambda t^{-\lambda-1}f(tx,ty)+t^{-\lambda}\cdot\left(f_x(tx,ty)x+f_y(tx,ty)y\right)\\ &= -\lambda t^{-\lambda-1}f(tx,ty)+t^{-\lambda}\left(t^{-1}\lambda f(tx,ty)\right)\\ &\equiv 0\end{aligned}$$

から t に関して $t^{-\lambda}f(tx,ty)$ は一定となります．従って

$$t^{-\lambda}f(tx,ty)=f(x,y)\quad\text{すなわち}\quad f'tx,ty)=t^{\lambda}f(x,y)$$

であることが分かります.