MSF 2020 L03 sol
05/08

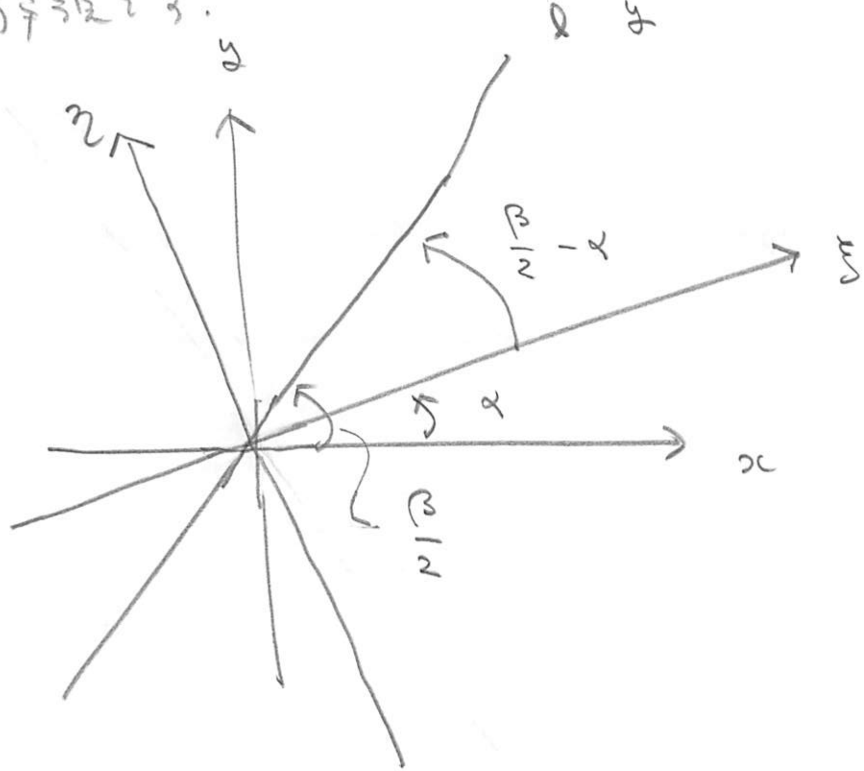
I (1) $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

III (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda z \\ y \\ z \end{pmatrix}$

II（自分で計算し直しましょう）
ここでは解説です。



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

で座標変換をします ↗

直線 l :
$$y = \left(\tan\frac{\beta}{2}\right) x$$
に関して $\vec{v}$ を折り返すと

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \vec{v}$$

となります（これは L05 で示しました）

なので ξ, η 座標では l は

$$\eta = \left(\tan\left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right)\right) \xi$$

となるので折り返しは

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\beta-2\alpha) & \sin(\beta-2\alpha) \\ \sin(\beta-2\alpha) & -\cos(\beta-2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} =$$

となります。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

は逆行列を作ると(L04で学びます)

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となります.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

から問題の行列ができます.

$$5\text{式} = \begin{pmatrix} \cos(\beta - 2\alpha) & \sin(\beta - 2\alpha) \\ \sin(\beta - 2\alpha) & -\cos(\beta - 2\alpha) \end{pmatrix}$$

となるはずです.

IV. $\begin{cases} x = s+t \\ y = 2s+t \end{cases} \iff \begin{cases} s = y-x \\ t = 2x-y \end{cases}$

なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff \text{ある } s, t \in \mathbb{C} \text{ に対して } \begin{cases} s = y - x & \cdots (1)' \\ t = 2x - y & \cdots (2)' \\ z = s + 3t + 1 & \cdots (3) \end{cases}$$

に注意しよう。s, t を代入して

$$z = (y-x) + 3(2x-y) + 1 \qquad (\#)$$

が必要であることが分かる。逆に $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ が $(\#)$ を満たせば、

$$s = y - x,\ t = 2x - y$$

とおけば

$$z = s + 3t + 1$$

となるので ある $s, t \in \mathbb{C}$ に対して $(1)'$, $(2)'$, (3) を満たす。よって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$

以上より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff z = (y-x) + 3(2x-y) + 1$$

基本 I　$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots \in \mathbb{K}^2$

基本はタテベクトル.

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

$$\vdots$$

II

$$A(\vec{x}\ \vec{y}) = (A\vec{x}\ \ A\vec{y})$$

$$A(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}) = (A\vec{x}\ \ A\vec{y}\ \ A\vec{z})$$

$$\vdots$$

Aが2タテならば $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{K}^2$

Aが3タテ —— $\in \mathbb{K}^3$

$$\vdots$$

1　$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = \beta_1 \\ a_2x + b_2y = \beta_2 \end{cases} \Longleftrightarrow x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{\beta} \Longleftrightarrow (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{\beta}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \beta_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = \beta_2 \end{cases} \Longleftrightarrow x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{\beta} \Longleftrightarrow (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\beta}$$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ (2)

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = \beta_1 \\ a_2 x + b_2 y = \beta_2 \\ a_3 x + b_3 y = \beta_3 \end{cases} \Longleftrightarrow x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{\beta} \Longleftrightarrow (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{\beta}$$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = \beta_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = \beta_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = \beta_3 \end{cases} \Longleftrightarrow x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{\beta}$$

$$\Longleftrightarrow (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\beta}$$

線型写像

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{K}^4$

$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbb{K}^2$

$$F : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^4$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は $F(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda F(\vec{v}) + \mu F(\vec{w})$ を満たす. ← 示せるか.

$$G : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$$
$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \longmapsto s\vec{p} + t\vec{q} = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^2 \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend left, "F \circ G"] & \mathbb{K}^2 \arrow[r, "F"] & \mathbb{K}^4 \end{tikzcd}$$

$$F \circ G\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = F\left(G\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = F(s\vec{p} + t\vec{q})$$
$$= sF(\vec{p}) + tF(\vec{q})$$
$$= \left(F(\vec{p})\ \ F(\vec{q})\right)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \left((\vec{a}\ \vec{b})(\vec{p}\ \vec{q})\right)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

ここで $\left(F(\vec{p})\ \ F(\vec{q})\right) = \left((\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}\ \ \ (\vec{a}\ \vec{b})\vec{q}\right)$
$$= (\vec{a}\ \vec{b})(\vec{p}\ \vec{q})$$

$$H : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2$$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} \longmapsto s\vec{p} + t\vec{q} + u\vec{r} = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

を用いて

$$(F \circ H)\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \cdots$$

を計算できるか？