$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{K}^2 \qquad X = (\vec{a}\ \vec{b})$

$$F_X : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

線形性

$$F_X(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda F_X(\vec{v}) + \mu F_X(\vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{K}^2, \lambda, \mu \in \mathbb{K})$$

線形性から導かれること

$\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{K}^2, \ Y = (\vec{p}\ \vec{q})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^2 \arrow[r, "F_X"] \arrow[rr, bend right, "F_Y \circ F_X"'] & \mathbb{K}^2 \arrow[r, "F_Y"] & \mathbb{K}^2 \end{tikzcd}$$

$$F_Y \circ F_X = F_{YX}.$$

$$\rightsquigarrow$$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^2$

$$Y(X\vec{v}) = Y(X\vec{v})$$

線型写像とは一般に、 $F : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$ が

$$F(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda F(\vec{v}) + \mu F(\vec{w})$$

を満たすとき。**実は** このとき $\exists !\, X \in M_2(\mathbb{K})$

$$F = F_X.$$

(証明)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= F\left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= x F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \underbrace{\left(F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \ F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right)}_{= X} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として → 標準単位ベクトルと呼ぶ。

$X, Y \in M_2(\mathbb{K})$ に対して

$$X\vec{v} = Y\vec{v} \quad (\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^2) \Longrightarrow X = Y$$

1) $f: X \longrightarrow Y$ が単射とは $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

2) $f: X \longrightarrow Y$ が全射とは $\forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ f(x) = y$

3) $f: X \longrightarrow Y$ が全単射とは f が全射かつ単射.

$X = (\vec{a}\ \vec{b})$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$F_X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考えます. 前回示したのは

$$\boxed{\vec{a} \nparallel \vec{b} \Longrightarrow F_X \text{ は単射}}$$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ ならば $\exists \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0} \rightsquigarrow F\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}\right) = \vec{0} = F(\vec{0})$ なので

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \Longrightarrow F_X \text{ は単射でない}}$$

よって

F_X が単射 $\Longleftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

前回示したのは

$\vec{a} \nparallel \vec{b} \Longrightarrow F_x : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$ は全射.

<u>問題</u> $\vec{a} \parallel \vec{b} \Longrightarrow F_x$ は全射でない.

この問題ができると

F_x : 単射 $\Longleftrightarrow F_x$: 全射 $\Longleftrightarrow F_x$: 全単射 $\Longleftrightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}$

$\Longleftrightarrow |\vec{a}\ \vec{b}| \neq 0$

$f: X \to Y$ が全単射 $\Rightarrow$ $\exists! g: Y \to X$ $\quad g \circ f = id_Y$

$$f \circ g = id_X$$

$\big(g \circ f(x) = x \ (\forall x \in X)$ かつ

$f \circ g(y) = y \ (\forall y \in Y) \big)$

$X = (\vec{a}\ \vec{b})$ $\quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{K}^2$ とする $\quad \vec{a} \nparallel \vec{b}$ とすると

$$F_X: \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は全単射.

問1 $\quad F_X^{-1}: \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ は線形か?

$\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbb{K}^2$ とする. $\exists! \vec{v}_1 \in \mathbb{K}^2$ $F_X(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$, $\exists! \vec{v}_2 \in \mathbb{K}^2$ $F_X(v_2) = \vec{w}_2$

このとき

$$F_X(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) = \lambda F_X(\vec{v}_1) + \mu F_X(\vec{v}_2) = \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2$$

これは

$$F_X^{-1}(\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2) = \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = \lambda F_X^{-1}(\vec{v}_1) + \mu F_X^{-1}(v_2)$$

従って 以下が分かる。 $\exists Y \in M_2(\mathbb{C})$

$$F_X \circ F_Y = F_Y \circ F_X = id_{\mathbb{C}^2} = F_{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

$I_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ を単位行列と呼びます。

$$\boxed{|\vec{a}\ \vec{b}| \neq 0 \Rightarrow \exists Y \in M_2(\mathbb{C})\ (XY = YX = I_2)}$$

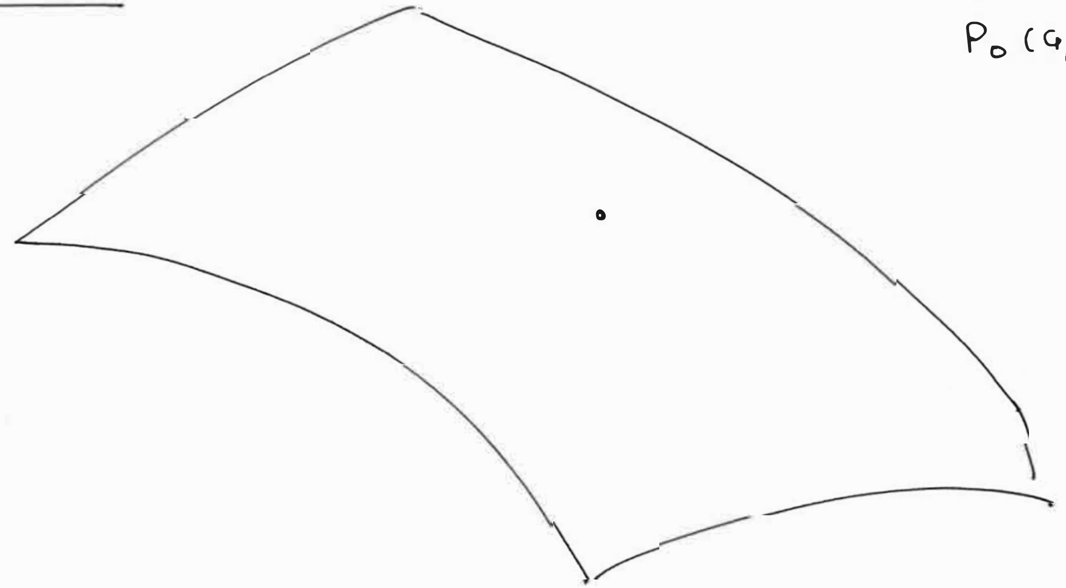
が示されました。この条件を満たす X を正則行列と呼びます。

以下はビデオで。

$\mathbb{R}^3$ 中の等量線の法面ベクトル

$g(x, y, z) = 0$

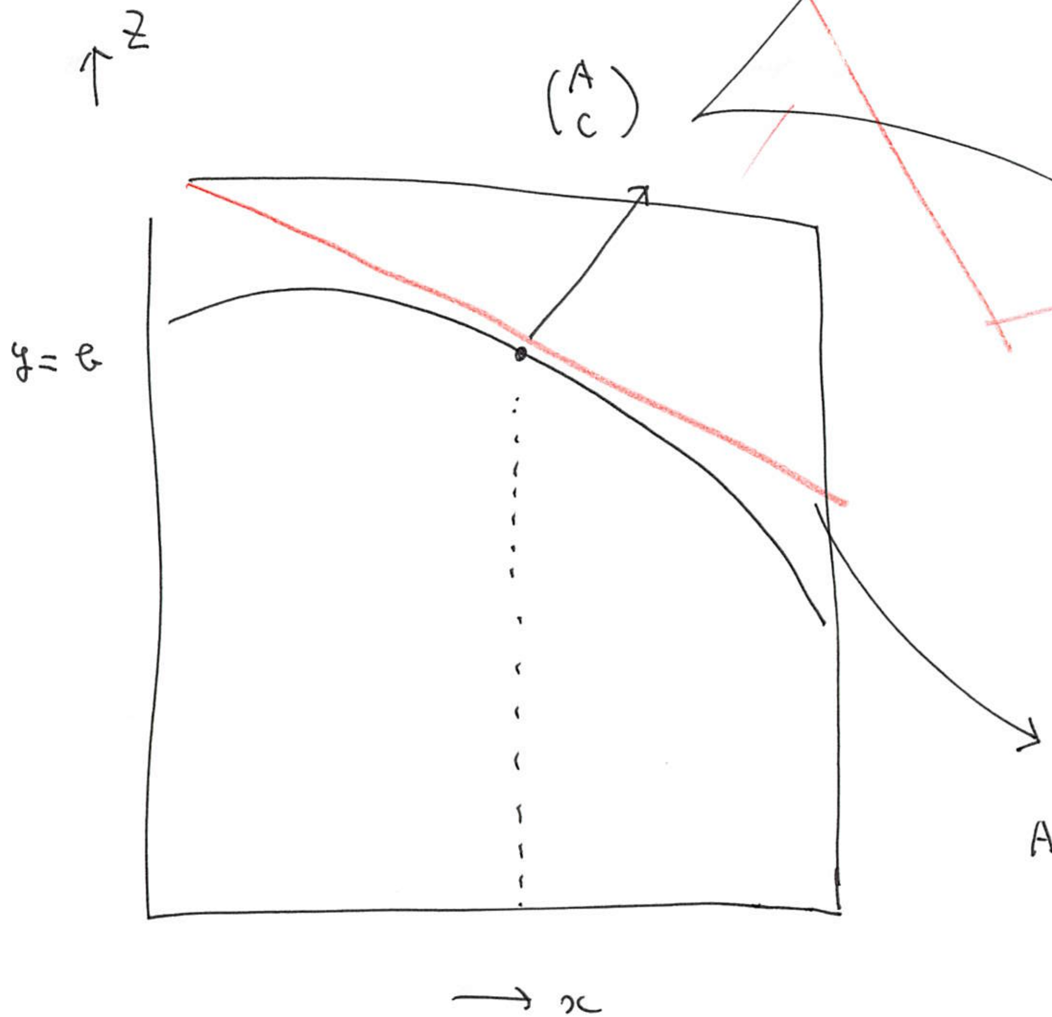
$P_0(a, b, c)$

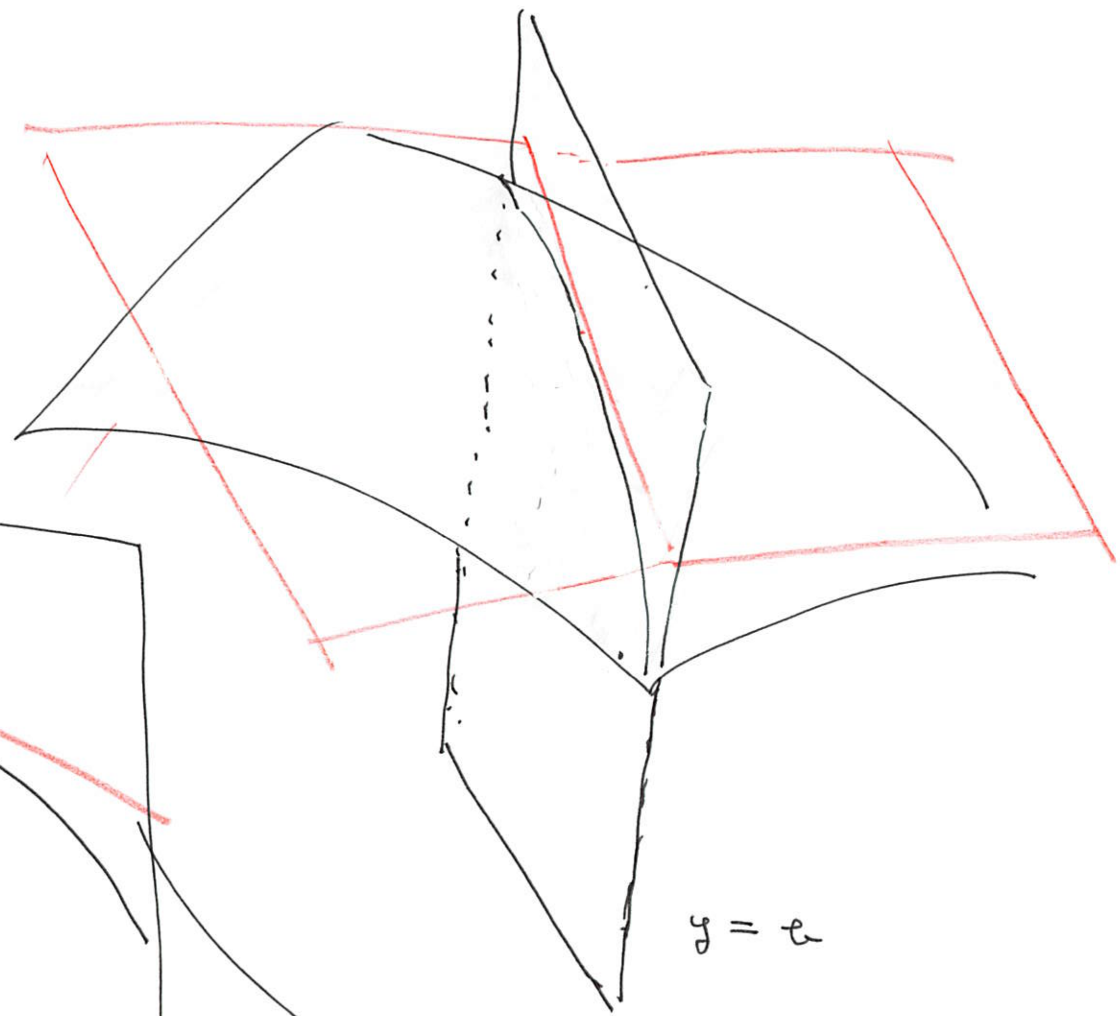


接線の方程式は？

$$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$$

とする。





$$A(x-a) + C(z-c) = 0$$

$$\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} g_x(P_0)\\ g_z(P_0)\end{pmatrix}$$

同様に

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} g_y(P_0) \\ g_z(P_0) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} g_x(P_0) \\ g_y(P_0) \\ g_z(P_0) \end{pmatrix}$$

$$g_x(P_0)(x-a) + g_y(P_0)(y-b) + g_z(P_0)(z-c) = 0$$

$$\left(\nabla(g)(P_0), \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \right) = 0$$