第 3 講義 05 月 08 日　演習問題解答

I $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が条件 $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を満たすとします.
(1) $\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$ が $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ を満たすことを示しましょう.
(2) $x\vec{a} + y\vec{b} = s\vec{p} + t\vec{q}$ が成立するとき s, t を x, y で表しましょう.

解答 (1) $c_1\vec{p} + c_2\vec{q} = \vec{0}$ とします．このとき

$$\begin{aligned} c_1\vec{p} + c_2\vec{q} &= c_1(3\vec{a} + \vec{b}) + c_2(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= (3c_1 + c_2)\vec{a} + (c_1 + c_2)\vec{b} \end{aligned}$$

から

$$(3c_1 + c_2)\vec{a} + (c_1 + c_2)\vec{b} = \vec{0}$$

であることが分かります．さらに $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\begin{cases} 3c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

であることが従います．このとき $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ であることに注意すると $c_1 = c_2 = 0$，従って $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ であることが分かります.

(2)

$$\begin{aligned} s\vec{p} + t\vec{q} &= s(3\vec{a} + \vec{b}) + t(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= (3s + t)\vec{a} + (s + t)\vec{b} \end{aligned}$$

であることから

$$x\vec{a} + y\vec{b} = (3s + t)\vec{a} + (s + t)\vec{b}$$

となります．さらに $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\begin{cases} 3s + t = x \\ s + t = y \end{cases}$$

であることが従います．これをクラメールの公式を用いて s, t について解くと $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ から

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{2}(x - y) \\ y &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(3y - x) = \frac{1}{2}(3y - x) \end{aligned}$$

であることが分かります.

II 以下のベクトルの外積を計算しましょう.
(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　**(3)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

III(1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a}, \vec{b}$ が作る平行四辺形の面積は

$$||\vec{a} \times \vec{b}||$$

であることを示しましょう．また

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

であることを示しましょう.（ここでは，3 次行列式を使わないで示しましょう.）

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が作る平行四面体の体積は

$$|(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|$$

であることを示しましょう.

IV $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします．このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},\ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

とします．このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

さらに $\vec{a}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{a}$ から $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ が従います.

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}
\end{aligned}
$$

V $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{R}^2$ が平行でないとします. $\vec{a},\vec{b}$ が定める平行四辺形の面積を S とするとき

$$S = \left| |\vec{a}\ \vec{b}| \right|$$

が成立することを示しましょう.

VI 次の行列の積を計算しましょう.

(1) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(7)** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(8)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(10)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(11)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

解答

(1)

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha & 0\\ 0 & \cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$

(3)

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+\lambda y\\ y\end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ x+\lambda y\end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x\\ y\end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \lambda+\mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & \lambda a_1+b_1\\ a_2 & \lambda a_2+b_2\end{pmatrix}$$

$$i.e.\quad (\vec a\ \vec b)\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (\vec a\ \lambda\vec a+\vec b)$$

(10)

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda a_1 & b_1\\ \lambda a_2 & b_2\end{pmatrix}$$

$$i.e.\quad (\vec a\ \vec b)\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (\lambda\vec a\ \vec b)$$

(11)

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1 & a_1\\ b_2 & a_2\end{pmatrix}$$

$$i.e.\quad (\vec a\ \vec b)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = (\vec b\ \vec a)$$

VII $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R}^n$ とします．以下を計算しましょう。

(1) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, **(2)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, **(3)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, **(4)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, **(5)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

(6) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, **(7)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, **(8)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

(9) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, **(10)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

(11) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, **(12)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$,

解答

(1)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}=\vec{a}$$

(2)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}=\vec{b}$$

(3)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}=\vec{a}$$

(4)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}=\vec{b}$$

(5)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}=\vec{c}$$

(6)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b} & 0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\end{pmatrix}$$

(7)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b} & 1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{b}\ \vec{a}\end{pmatrix}$$

(8)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c} & 0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c} & 0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

(9)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\Big(0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}\quad 0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}\quad 1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}\Big)=(\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a})$$

(10)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\Big(\lambda\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}\quad 0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}\quad 0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}\Big)=(\lambda\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

(11)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\Big(1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}\quad 0\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}\quad 0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}\Big)=(\vec{a}\ \lambda\vec{b}\ \vec{c})$$

(12)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\Big(1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}\quad 0\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}\quad 0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}\Big)=(\vec{a}\ \vec{b}\ \lambda\vec{c})$$

IX

直線 ℓ_1

$$\begin{cases}x+y+z+1=0\\3x-2y+z+5=0\end{cases}$$

直線 ℓ_2

$$\begin{cases}x-z+1=0\\3x+2y-z+2=0\end{cases}$$

があります．原点を通り直線 ℓ_1, ℓ_2 に交わる直線を求めましょう．

解答直線 ℓ_1 と原点を含む平面 π_1 は

$$5(x+y+z+1)-(3x-2y+z+5)=0\quad すなわち\quad 2x+7y+4x=0 \tag{1}$$

他方，直線 ℓ_2 と原点を含む平面 π_2 は

$$2(x-z+1)-(3x+2y-z+2)=0\quad すなわち\quad -x-2y-z=0 \tag{2}$$

であることが分かります．π_1 と π_2 の交わりは (1) かつ (2) を解いて

$$x = \frac{1}{3}z, \quad y = -\frac{2}{3}z \tag{3}$$

となる．この直線を ℓ とすると，ℓ が求める直線である．実際 ℓ_1 の方向ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ は π_1 に平行で

$$\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

が成立しますから π_1 中 ℓ_1 と ℓ は交わります．他方，ℓ_2 の方向ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ は π_2 に平行で

$$\begin{pmatrix}-1\\4\\55\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

が成立しますから π_2 中 ℓ_2 と ℓ は交わります．よって ℓ は原点を通り，ℓ_1 と ℓ_2 と交わります．