2次元部分空間・2平面の交わり・ベクトル積

MSF2020 L03, MSF2021 L04

Nobuyuki TOSE

May 08, 2020
April 30, 2021

Plan

Part 01
2次元部分空間

2 次元部分空間

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ が平行でないとします：$\vec{a} \nparallel \vec{b}$

このとき

$$V := \{x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbf{K}^n;\ x, y \in \mathbf{K}\}$$

を $\vec{a}, \vec{b}$ が生成する 2 次元部分空間と呼びます.

$\vec{v} \in V$ は $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ と表されますが，x,y は一意的です.

実際

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$$

とすると

$$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0}$$

から $x = x'$, $y = y'$ が従います.

2 次元部分空間 (2)

$$\vec{\alpha} = x\vec{a} + y\vec{b}, \quad \vec{\beta} = z\vec{a} + w\vec{b}$$

とするとき

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{aligned} c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} &= c_1(x\vec{a} + y\vec{b}) + c_2(z\vec{a} + w\vec{b}) \\ &= (xc_1 + zc_2)\vec{a} + (yc_1 + wc_2)\vec{b} = \vec{0} \end{aligned}$$

とします．$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xc_1 + zc_2 & = & 0 \\ yc_1 + wc_2 & = & 0 \end{array} \right. \tag{\#}$$

が従います．

$\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ ならば $(\#)$ から $c_1 = c_2 = 0$ が導けますから

$$\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$$

が従います.
他方

$$\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| = 0$$

ならば $(\#)$ を満たす $c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ で $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ を満たすものが存在して

$$c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} = \vec{0}$$

が成立します．これは

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$$

を意味します.

Part 02
2平面の交わりとベクトル積

2枚の平面が定める直線

座標空間の点 (x, y, z) が方程式

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & \cdots (1) \\ 2x + y - z = -1 & \cdots (2) \end{cases}$$

を満たすとき x, y を z で表しましょう.

$$\begin{cases} x - y = 1 - z & (1)' \\ 2x + y = z - 1 & (2)' \end{cases}$$

と x と y の連立 1 次方程式とみなします. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ であるので, これをクラメールの公式で解きます.

2枚の平面が定める直線 (2)

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ -1+z & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\{(1-z)\cdot 1-(-1+z)(-1)\} = \frac{1}{3}\cdot 0 = 0 \\
y &= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & -1+z \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\{1\cdot(-1+z)-2\cdot(1-z)\} = \frac{1}{3}(3z-3) = z-1
\end{aligned}$$

2 枚の平面が定める直線 (3)

ベクトル表示をすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z-1 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので $(0,-1,0)$ を通り $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が方向ベクトルである直線であることが分かる．これは (1) が定める平面と (2) が定める平面の交わりがなす直線であることが分かる．

平面の方程式

点 $(0,-1,0)$ は

$$x - y + z = 1 \quad \cdots (1)$$

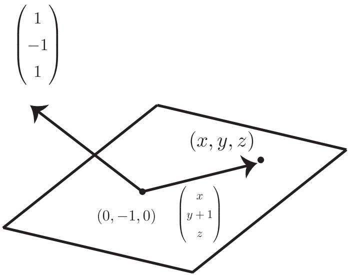
を満たす．これから

$$\begin{array}{rcccccccl} & x & - & y & + & z & = & 1 & \cdots (1) \\ -) & 0 & - & (-1) & + & 0 & = & 1 & \\ \hline & x & - & (y+1) & + & z & = & 0 & \cdots (1)' \end{array}$$

となります．(1)' は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = 0$$

平面の方程式 (2)

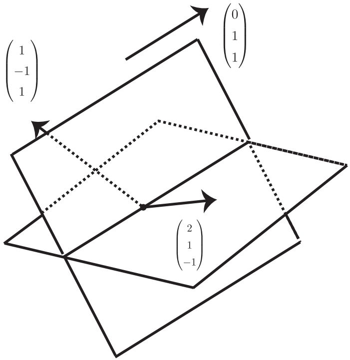


(1) は法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で $(0, -1, 0)$ を通る平面であることが分かります.

2 平面の交わり

ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は平面 (1) と平行であり，平面 (2) とも平行である．これから

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



2 平面の交わり (2)

2 平面の交わり

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2 & (2) \end{cases}$$

を考えます．(1) と (2) の法線ベクトルについて

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が成立するとします．さらに

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

を仮定します．

2 平面の交わり (3)

クラメールの公式を用いて

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -c_1 z + \alpha_1 & b_1 \\ -c_2 z + \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 z + \alpha_1 \\ a_2 & -c_2 z + \alpha_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

が従います．さらに $t = \frac{z}{D}$ とパラメータを定めると，上の結果をベクトルで表すことによって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と 2 直線の交わりは直線としてパラメータ表示される．

2 平面の交わり (4)—ベクトル積

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

を $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ の外積（ベクトル積）と呼びます．このとき

$$\vec{p}_1 \perp \vec{p}_1 \times \vec{p}_2, \quad \vec{p}_2 \perp \vec{p}_1 \times \vec{p}_2$$

以上で幾何学的にこれは示しましたが，代数的にも示せます．

ベクトル積の性質

復習

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\vec{p}_1 \not\parallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

これから

$$\vec{p}_1 \not\parallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \neq \vec{0}$$

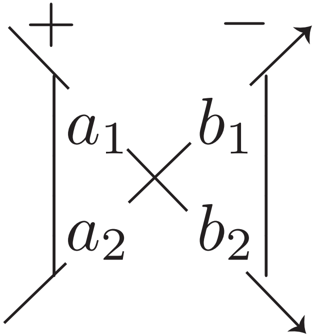
$$\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \vec{0}$$

以上は代数的に示していて $\mathbf{C}^3$ 中でも大丈夫です．後にベクトル積の幾何学的な意味を考えるときに，$\mathbf{R}^3$ の場合に幾何的な証明を与えます．

Part 03
2次行列式

定義

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$



列の基本性質

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

に対して

I（2 重線型性–各列に関して線型）

$$|\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad \vec{c}| = \lambda \cdot |\vec{a} \quad \vec{c}| + \mu \cdot |\vec{b} \quad \vec{c}|$$

$$|\vec{a} \quad \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}| = \lambda \cdot |\vec{a} \quad \vec{b}| + \mu \cdot |\vec{a} \quad \vec{c}|$$

II（交代性）

$$|\vec{a} \quad \vec{b}| = -|\vec{b} \quad \vec{a}|$$

III（正規性）

$$|I_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

基本性質 (I) の証明について

補題 写像

$$F: \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto px_1 + qx_2$$

は

$$F(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda \cdot F(\vec{a}) + \mu \cdot F(\vec{b})$$

を満たす.

基本性質から導かれる性質

II' $|\vec{a} \quad \vec{a}| = 0$

(II) から $|\vec{a} \quad \vec{a}| = -|\vec{a} \quad \vec{a}|$

IV $|\vec{a} \quad \vec{b}| = |\vec{a} \quad \lambda\vec{a} + \vec{b}|, \quad |\vec{a} \quad \vec{b}| = |\vec{a} + \lambda\vec{b} \quad \vec{b}|$

$$|\vec{a} \quad \lambda\vec{a} + \vec{b}| = \lambda \cdot |\vec{a} \quad \vec{a}| + |\vec{a} \quad \vec{b}| = \lambda \cdot 0 + |\vec{a} \quad \vec{b}| = |\vec{a} \quad \vec{b}|$$

ベクトルと行列の転置 (1)

ベクトルの転置

$$ {}^t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (a_1 \ \ a_2), \quad {}^t(a_1 \ \ a_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} $$

(転置の線型性)$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^2$ に対して

$$ {}^t\left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\right) = \lambda \cdot {}^t\vec{a} + \mu \cdot {}^t\vec{b} $$

行ベクトル $\mathbf{a} = (a_1 \ \ a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1 \ \ b_2) \in \left(\mathbf{K}^2\right)^*$ に対しても

$$ {}^t(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda \cdot {}^t\mathbf{a} + \mu \cdot {}^t\mathbf{b} $$

ベクトルと行列の転置 (2)

行列の転置 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \end{pmatrix} = ({}^t\mathbf{a}_1 \ {}^t\mathbf{a}_2)$$

転置行列の行列式

2 次正方行列 $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$\left|{}^t A\right| = |A| , \quad \begin{vmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \end{vmatrix} = |\vec{a}_1 \ \vec{a}_2| , \quad \left|{}^t\mathbf{a}_1 \ {}^t\mathbf{a}_2\right| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}$$

成分では

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

行の基本性質 (1)

I（2 重線型性—行に関して線型）

$$\begin{vmatrix} \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

$$G: \ (\mathbf{K}^2)^* \to \mathbf{K} \quad (x \ y) \mapsto px + qy$$

が

$$G(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \lambda G(\mathbf{a}) + \mu G(\mathbf{b})$$

を満たすことから示されます．または

$$\begin{vmatrix} \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \left|{}^t(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) \ \ {}^t\mathbf{c}\right| = \left|\lambda{}^t\mathbf{a}+\mu{}^t\mathbf{b} \ \ {}^t\mathbf{c}\right| = \lambda\cdot\left|{}^t\mathbf{a} \ \ {}^t\mathbf{c}\right| + \mu\cdot\left|{}^t\mathbf{b} \ \ {}^t\mathbf{c}\right| = RHS$$

行の基本性質 (2)

II （交代性） $\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix}$

直接示すのが簡単ですが，将来一般的な場合を考えることを考慮して

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{a} & {}^t\mathbf{b} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} {}^t\mathbf{b} & {}^t\mathbf{a} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix}$$

行の性質 (1)

II' $\qquad \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix} = 0$

基本性質 **II**（交代性）を用いて

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix}$$

から分かります.

行の性質 (2)

IV $$\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}\end{vmatrix},\qquad\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}\\\mathbf{b}\end{vmatrix}$$

基本性質 **I** と **II**（交代性）を用いて

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{a}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{vmatrix}=\lambda\cdot 0+\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{vmatrix}$$

行列の積の行列式 (1)

V $X, Y \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$|XY| = |X| \cdot |Y|$$

$$X = (\vec{a}\ \vec{b}), \quad Y = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

とすると

$$XY = (p_1\vec{a} + p_2\vec{b}\ \ q_1\vec{a} + q_2\vec{b})$$

行列の積の行列式 (2)

$$
\begin{aligned}
|XY| &= \left| p_1\vec{a} + p_2\vec{b} \;\; q_1\vec{a} + q_2\vec{b} \right| \\
&= p_1 \left| \vec{a} \;\; q_1\vec{a} + q_2\vec{b} \right| + p_2 \left| \vec{b} \;\; q_1\vec{a} + q_2\vec{b} \right| \\
&= p_1 \left| \vec{a} \;\; q_2\vec{b} \right| + p_2 \left| \vec{b} \;\; q_1\vec{a} \right| \\
&= p_1 q_2 \left| \vec{a} \;\; \vec{b} \right| + p_2 q_1 \left| \vec{b} \;\; \vec{a} \right| \\
&= p_1 q_2 \left| \vec{a} \;\; \vec{b} \right| - p_2 q_1 \left| \vec{a} \;\; \vec{b} \right| \\
&= (p_1 q_2 - p_2 q_1) \left| \vec{a} \;\; \vec{b} \right| = |Y| \cdot |X|
\end{aligned}
$$

行列の積の行列式 (3)—応用

定理 $A \in M_2(\mathbf{K})$ が正則ならば

$$|A| \neq 0$$

Part 04
2次正方行列

行列の掛け算

- 行ベクトル × 列ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

2 行の行列

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$ (2 行 2 列の行列)

第1列

(1,2)成分

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

第2行

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$ (2 行 3 列の行列)

行列 ×列ベクトル

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} = x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1+yb_1 \\ xa_2+yb_2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1+yb_1+zc_1 \\ xa_2+yb_2+zc_2 \end{pmatrix}$$

連立 1 次方程式の表現は次のようになる.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= \alpha \\ a_2x + b_2y &= \beta \end{cases} \Leftrightarrow x\vec{a} + y\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= \alpha \\ a_2x + b_2y + c_2z &= \beta \end{cases} \Leftrightarrow x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

3行の行列

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

$$= x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 \\ xa_2 + yb_2 \\ xa_3 + yb_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

3 行の行列 (2)

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xa_1+yb_1+zc_1 \\ xa_2+yb_2+zc_2 \\ xa_3+yb_3+zc_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

2 次正方行列の積

$$X = (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad Y = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\begin{aligned} XY = X(\vec{p}\ \vec{q}) &= (X\vec{p}\ X\vec{q}) \\ &= (p_1\vec{a} + p_2\vec{b} \quad q_1\vec{a} + q_2\vec{b}) \\ &= \begin{pmatrix} p_1 a_1 + p_2 b_1 & q_1 a_1 + q_2 b_1 \\ p_1 a_2 + p_2 b_2 & q_1 a_2 + q_2 b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1\ \ b_1)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} & (a_1\ \ b_1)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ (a_2\ \ b_2)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} & (a_2\ \ b_2)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

行列の積の基本性質

線型性

$$X(\vec{p}+\vec{q}) = X\vec{p}+X\vec{q}, \quad X(\lambda\vec{p}) = \lambda\,(X\vec{p})$$

$$\begin{aligned} LHS &= X\begin{pmatrix} p_1+q_1 \\ p_2+q_2 \end{pmatrix} = (p_1+q_1)\vec{a}+(p_2+q_2)\vec{b} \\ &= (p_1\vec{a}+p_2\vec{b})+(q_1\vec{a}+q_2\vec{b}) = X\vec{p}+X\vec{q} \\ LHS &= X\begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \end{pmatrix} = (\lambda p_1)\,\vec{a}+(\lambda p_2)\,\vec{b} \\ &= \lambda(p_1\vec{a})+\lambda(p_2\vec{b}) \\ &= \lambda(p_1\vec{a}+p_2\vec{b}) = \lambda(X\vec{p}) \end{aligned}$$

行列の積の基本性質 (2)

線型性 (2)

$$X(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}) = \lambda(X\vec{p}) + \mu(X\vec{q})$$

$$\begin{aligned} LHS &= X(\lambda\vec{p}) + X(\mu\vec{q}) \\ &= \lambda(X\vec{p}) + \mu(X\vec{q}) \end{aligned}$$

結合法則

結合法則 (1)

2 次正方行列 $X = (\vec{a}\ \vec{b})$, $Y = (\vec{p}\ \vec{q})$, $\vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right)$ に対して

$$X(Y\vec{c}) = (XY)\vec{c}$$

$$\begin{aligned} LHS &= X(c_1\vec{p} + c_2\vec{q}) = c_1(X\vec{p}) + c_2(X\vec{q}) \\ &= (X\vec{p}\ X\vec{q})\vec{c} = (XY)\vec{c} \end{aligned}$$

結合法則

結合法則 (2)

$Z = (\vec{c}\ \vec{d}) = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$(XY)Z = X(YZ)$$

$$\begin{aligned} LHS &= (XY)(\vec{c}\ \vec{d}) = \left((XY)\vec{c}\ (XY)\vec{d}\right) \\ &= \left(X(Y\vec{c})\ X(Y\vec{d})\right) = X\left(Y\vec{c}\ Y\vec{d}\right) \\ &= X(YZ) \end{aligned}$$

連立１次方程式と行列式

連立１次方程式

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by &=& 0 \\ cx+dy &=& 0 \end{array}\right. \qquad \left(\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}\right) \qquad (\#)$$

を考える． $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0, \quad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

よって

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \ \Rightarrow \left((\#) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}\right)$$

連立1次方程式と行列式 (2)

逆の対偶

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0 \;\Rightarrow \left(\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{が} \ (\#) \ \text{を満たす} \right)$$

これを示すために

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \vec{0}$$

に注意する．

連立1次方程式と行列式 (3)

(i) $\underline{a \neq 0 \text{ OR } b \neq 0}$のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{AND} \quad \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

(ii) $\underline{c \neq 0 \text{ OR } d \neq 0}$のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{AND} \quad \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

(iii) NOT (i) AND NOT (ii) $\Leftrightarrow a = b = c = d = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

連立 1 次方程式と行列式 (4)

定理

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$