MSF2020L02 05/01 小テスト問題解答

I 関数 $f(x,y) := x^2 + 3xy + y^2 + 4x + 6y$ の停留点を求めましょう.

解答

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + 3y + 0 + 4 + 0 \\ &= 2x + 3y + 4 = 0 \\ f_y &= 0 + 3x \cdot 1 + 2y + 0 + 6 \\ &= 3x + 2y + 6 = 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y &=& -4 \\ 3x + 2y &=& -6 \end{array} \right.$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\left|\begin{smallmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 2 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{10}{-5} = -2$$

$$y = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから，f の停留点は $(x,y) = (-2,0)$ です.

II クラメールの公式を用いて $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x-y-z &= -1 \end{cases}$ を満たす (x,y,z) に対して x,y を z で表しましょう.

解答

$$\begin{cases} x+y &= -z+1 \\ 2x-y &= z-1 \end{cases}$$

をクラメールの公式を用いて x,y について解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right|} \cdot \left|\begin{smallmatrix} -z+1 & 1 \\ z-1 & -1 \end{smallmatrix}\right| \\ &= -\frac{1}{3}\{-(-z+1)-(z-1)\} = -\frac{1}{3}\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right|} \cdot \left|\begin{smallmatrix} 1 & -z+1 \\ 2 & z-1 \end{smallmatrix}\right| \\ &= -\frac{1}{3}\{(z-1)-2(-z+1)\} = -\frac{1}{3}(3z-3) = -z+1 \end{aligned}$$

III $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が条件 $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を満たすとします.

(1) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ が $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ を満たすことを示しましょう.

(2) $x\vec{a} + y\vec{b} = s\vec{p} + t\vec{q}$ が成立するとき s, t を x, y で表しましょう.

解答 (1) $c_1\vec{p} + c_2\vec{q} = \vec{0}$ とします．このとき

$$\begin{aligned} c_1\vec{p} + c_2\vec{q} &= c_1(2\vec{a} + \vec{b}) + c_2(\vec{a} - \vec{b}) \\ &= (2c_1 + c_2)\vec{a} + (c_1 - c_2)\vec{b} \end{aligned}$$

から

$$(2c_1 + c_2)\vec{a} + (c_1 - c_2)\vec{b} = \vec{0}$$

であることが分かります．さらに $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\begin{cases} 2c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ c_1 & - & c_2 & = & 0 \end{cases}$$

であることが従います．このとき $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ であることに注意すると $c_1 = c_2 = 0$，従って $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ であることが分かります.

(2)

$$\begin{aligned} s\vec{p}+t\vec{q} &= s(2\vec{a}+\vec{b})+t(\vec{a}-\vec{b}) \\ &= (2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b} \end{aligned}$$

であることから

$$x\vec{a}+y\vec{b}=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}$$

となります．さらに $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ から

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2s & + & t & = & x \\ s & - & t & = & y \end{array}\right.$$

であることが従います．これをクラメールの公式を用いて s, t について解くと $\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right| = -3 \neq 0$ から

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{3}\left|\begin{smallmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{smallmatrix}\right| = -\frac{1}{3}(-x-y) = \frac{1}{3}(x+y) \\ y &= -\frac{1}{3}\left|\begin{smallmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right| = -\frac{1}{3}(2y-x) = \frac{1}{3}(x-2y) \end{aligned}$$

であることが分かります.