## 第 2 講義 05 月 01 日　演習問題解答

**I** 以下の函数の停留点を求めましょう.

(1)　$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$　(2)　$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

(3)　$z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$　(4)　$z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$

(5)　$z = x^3 - xy - y^2$　(6)　$z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$

(7)　$z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$　(8)　$z = x^3 + y^3 + 6xy$

**(1)**

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 &= 0 \\ z_y &= x + 2y - 8 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式を使って解くと

$$x = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{0}{3} = 0, \quad y = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{12}{3} = 4$$

となりますから，$(x, y) = (0, 4)$ が $z$ の停留点であることが分かります.

**(2)**

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2 - 9y &= 0 \cdots (I) \\ z_y &= 3y^2 - 9x &= 0 \cdots (II) \end{cases}$$

を解きます. (I) から $y = \frac{1}{3}x^2$ となるので (II) から得られる $y^2 = 3x$ に代入して

$$\frac{1}{9}x^4 = 3x \quad \text{すなわち} \quad x^4 = 27x$$

を得ます. 従って

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = 3$$

が必要です.

**(a)** $\underline{x = 0\text{ のとき}}$, (I) から $y = 0$ となりますが、逆に $(x, y) = (0, 0)$ は (I) かつ (II) を満たします.

**(b)** $\underline{x = 3\text{ のとき}}$, (I) から $y = 3$ となりますが、逆に $(x, y) = (3, 3)$ は (I) かつ (II) を満たします.

以上で $z$ の停留点は $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$ であることが分かりました.

**(3)**

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 &= 0 \\ z_y &= x - 2y - 2 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから，$(x, y) = (2, 0)$ が $z$ の停留点であることが分かります.

**(4)**

$$\begin{cases} z_x &= 2x + 4y - 6 &= 0 \\ z_y &= 4x + 4y - 8 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{-8}{-8} = 1$$

から停留点は $(x, y) = (1, 1)$ となります.

**(5)**

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2 - y &= 0 & (i) \\ z_y &= -x - 2y &= 0 & (ii) \end{cases}$$

を解きます。(ii) から $x = -2y$ となりますが，これを (i) に代入して

$$12y^2 - y = 0$$

を得ますが，これから $y = 0$ または $y = \frac{1}{12}$ であることが分かります. これを $x = -2y$ に代入して

$$\begin{aligned} y = 0 &\quad \text{のとき} \quad x = 0 \\ y = \tfrac{1}{12} &\quad \text{のとき} \quad x = -\tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

となりますから，停留点は

$$(x,y)=(0,0),\quad (-\frac{1}{6},\frac{1}{12})$$

であることが分かります.

**(6)** まず関数

$$z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$$

の停留点を求めましょう．まず $z$ の偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned}
z_x &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x^2+y^2)+e^{-x^2-y^2}(4x)\\
&= 2xe^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+2)\\
z_y &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x^2+y^2)+e^{-x^2-y^2}(2y)\\
&= 2ye^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+1)
\end{aligned}$$

となります．$e^{-x^2-y^2}>0$ ですから

$$\begin{aligned}
& z_x=z_y=0\\
\Leftrightarrow\ & x(2x^2+y^2-2)=0\\
& \qquad \text{and } y(2x^2+y^2-1)=0\\
\Leftrightarrow\ & (x=0 \text{ or } 2x^2+y^2=2)\\
& \qquad \text{and } (y=0 \text{ or } 2x^2+y^2=1)\\
\Leftrightarrow\ & (x=y=0)\\
& \qquad \text{or } (x=0 \text{ and } 2x^2+y^2=1)\\
& \text{ or } (y=0 \text{ and } 2x^2+y^2=2)\\
& \text{ or } (2x^2+y^2=2 \text{ and } 2x^2+y^2=1)\\
\Leftrightarrow\ & (x=y=0) \text{ or } (x=0 \text{ and } y^2=1)\\
& \text{ or } (y=0 \text{ and } x^2=1)\\
& \text{ or } (2x^2+y^2=2 \text{ and } 2x^2+y^2=1)\\
\Leftrightarrow\ & (x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)
\end{aligned}$$

が成立します．従って $z$ の停留点は $(x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)$ です.

**(7)** $f(x,y)$ の偏導関数は

$$\begin{aligned}
f_x &= 2(x^2+y^2)\cdot 2x-4x=4x(x^2+y^2-1)\\
f_y &= 2(x^2+y^2)\cdot 2y-4x=4y(x^2+y^2+1)
\end{aligned}$$

と計算されます。このことから

$$\begin{aligned}
f_x=0 &\quad\Leftrightarrow\quad (x=0) \text{ OR } (x^2+y^2=1)\\
f_y=0 &\quad\Leftrightarrow\quad y=0
\end{aligned}$$

が従いますので

$$\begin{aligned}
f_x=f_y=0 &\quad\Leftrightarrow\quad (x=y=0)\\
&\qquad\qquad \text{OR } (x^2+y^2=1, \text{AND } y=0)\\
&\quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=(0,0),\ (\pm1,0)
\end{aligned}$$

が分かります。以上で $f$ の停留点は $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ の 3 点であることが示されました。

**(8)** （コアテキストの 282 ページの例 8.18）
$z$ の偏導関数は

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6y=0\cdots(1)\\ z_y=3y^2+6x=0\cdots(2)\end{cases}$$

と計算されます．(2) から $x=-\frac{1}{2}y^2$ を得ますが，これを (1) から得られる $y=-\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}y^2\right)^2=-\frac{1}{8}y^4$$

が導かれます．従って

$$y(y^3+8)=0$$

から $y=0$ または $y=-2$ であることが必要条件であることが分かります．このとき

(i) $y=0$ のとき (2) に代入して $x=0$
(ii) $y=-2$ のとき (2) から $x=-2$ を得る.

を得ます．以上で停留点は

$$(x,y)=(0,0)\text{または}(-2,-2)$$

であることが示されました.

**II** $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が平行でないとします。このとき

$$\vec{x} \nparallel \lambda\vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{x} + \vec{y} \nparallel \vec{x} - \vec{y}$$

であることを示しましょう.

**解答**

$$c_1\vec{x} + c_2\left(\lambda\vec{x} + \vec{y}\right) = \left(c_1 + \lambda c_2\right)\vec{x} + c_2\vec{y} = \vec{0}$$

とします．このとき $\vec{x} \nparallel \vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 + \lambda c_2 = 0 \\ \phantom{c_1 + \lambda} c_2 = 0 \end{cases}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

に注意すると $c_1 = c_2 = 0$ が従います．従って

$$\vec{x} \nparallel \lambda\vec{x} + \vec{y}$$

であることが分かります．他方

$$c_1(\vec{x} + \vec{y}) + c_2(\vec{x} - \vec{y}) = (c_1 + c_2)\vec{x} + (c_1 - c_2)\vec{y} = \vec{0}$$

とします．このとき $\vec{x} \nparallel \vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

に注意すると $c_1 = c_2 = 0$ が従います．従って

$$\vec{x} + \vec{y} \nparallel \vec{x} - \vec{y}$$

であることが分かります.

**III** $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ は平行でないとします：

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}$$

このとき

$$\vec{\alpha} = x\vec{a} + y\vec{b}, \quad \vec{\beta} = z\vec{a} + w\vec{b}$$

とするとき

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} \neq 0$$

が成立することを示しましょう.

**解答**

$$\begin{aligned} c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} &= c_1(x\vec{a} + y\vec{b}) + c_2(z\vec{a} + w\vec{b}) \\ &= (xc_1 + zc_2)\vec{a} + (yc_1 + wc_2)\vec{b} = \vec{0} \end{aligned}$$

とします. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xc_1 + zc_2 &=& 0 \\ yc_1 + wc_2 &=& 0 \end{array} \right. \tag{\#}$$

が従います.

ここで $\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ ならば (#) から $c_1 = c_2 = 0$ が導けますから

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$$

が従います. 他方

$$\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| = 0$$

ならば (#) を満たす $c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ で $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ を満たすものが存在して

$$c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} = \vec{0}$$

が成立します. これは

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$$

を意味します.

**IV** $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ とします
**(1)**

$$\vec{x} \nparallel \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \nparallel \lambda\vec{x} + \vec{y}$$

を示しましょう.
**(2)** $\vec{x}$ の第 1 成分が $x_1 \neq 0$ を満たすとします. (1) を $\lambda = -\frac{y_1}{x_1}$ で適用することによって

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = 0$$

が $i \neq j$ を満たすすべての $i, j$ に対して成立ならば

$$\vec{x} \parallel \vec{y}$$

が従うことを証明しましょう.

**解答 (1)** 問題 II から

$$\vec{x} \nparallel \vec{y} \ \Rightarrow \vec{x} \nparallel \lambda\vec{x} + \vec{y}$$

が成立します. もう一度, 問題 II を使うと

$$\vec{x} \nparallel \lambda\vec{x} + \vec{y} \ \Rightarrow \vec{x} \nparallel (-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{x} + \vec{y}$$

であることが分かりますが, これは

$$(-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{x} + \vec{y} = \vec{y}$$

であることから

$$\vec{x} \nparallel \lambda\vec{x} + \vec{y} \ \Rightarrow \vec{x} \nparallel \vec{y}$$

が従います.
**(2)**

$$\begin{aligned} -\frac{y_1}{x_1}\vec{x} + \vec{y} &= -\frac{y_1}{x_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-y_1x_1 + x_1y_1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{-y_1x_i + x_1y_i}{x_1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{x_1}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \end{vmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

から $\vec{x} \parallel (-\frac{y_1}{x_1}\vec{x} + \vec{y})$ が分かります. さらに (1) を用いると $\vec{x} \parallel \vec{y}$ が従います.