MSF2020 L02 Part 01
偏微分係数と極大・極小の必要条件

Nobuyuki TOSE

MSF2020, Lec 02 May 01, 2020

プラン

Part 01a
開集合

開円盤

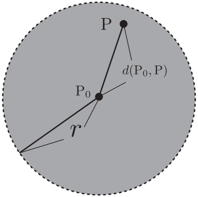
開円盤 (Open Disc)

$r > 0$, $\mathrm{P}_0(a, b) \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\}$$

を中心 P_0, 半径 $r > 0$ の**開円盤**と呼びます．ここで $d(\mathrm{P}_0, \mathrm{P})$ は 2 点 P_0, P の距離です．$\mathrm{P}(x, y)$ のとき

$$d(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$



注意今後「P_0 の近くで〜」という言い方をしますが，これはある正数 $r > 0$ に対して

$$任意の\mathrm{P} \in B_r(\mathrm{P}_0)において〜$$

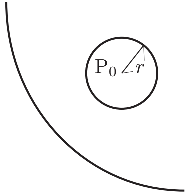
開集合（Open subsets）

Definition

$\mathbf{R}^2$ の部分集合 U があるとします．U が開集合であるとは任意の $\mathrm{P}_0 \in U$ に対して $r > 0$ が存在して

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\} \subset U$$

が成立することです.



注意 U の任意の点 P_0 の周りが U に含まれているということです.

命題・命題関数

命題とは真偽が明らかな文のことです．例えば

$$2 > 1 \quad 真（\mathrm{Truth}）$$
$$1 > 2 \quad 偽（\mathrm{False}）$$

集合 X 上の**命題関数**とは $x \in X$ に対して命題 $P(x)$ を対応させるものです．例えば $X = \mathbf{R}$ のとき

$$P(x): \quad 1 < x$$

と定めると

$$P(0): \quad 1 < 0 \quad 偽$$
$$P(2): \quad 1 < 2 \quad 真$$

となります.

命題関数 (2)

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ があるとき付随して命題を定めることができます.

$$\forall x \in X\,(P(x))$$

はすべての $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題です．前ページの例では $P(0)$ が偽ですから $\forall x \in X\,(P(x))$ は偽です.
さらに

$$\exists x \in X\,(P(x))$$

はある $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題です．前ページの例では $P(2)$ が真ですから $\exists x \in X\,(P(x))$ は真です.

開集合の例

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合です.

- $\mathbf{R}^2$
- 上半平面

$$U_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y > 0\}$$

- 第 1 象限（1st Quadrant）

$$\mathbf{R}^2_{++} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x, y > 0\}$$

- 開円盤

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\}$$

開集合–反例

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合ではありません．

- $\mathrm{P}_0 \in \mathbf{R}^2$ のなす集合 $\{\mathrm{P}_0\}$
- 閉上半平面

$$F_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq 0\}$$

- 閉第 1 象限

$$\overline{\mathbf{R}^2_{++}} := \{(x, y)\mathbf{R}^2;\ x, y \geq 0\}$$

- 閉円盤

$$\overline{B_r(\mathrm{P}_0)} := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) \leq r\}$$

Part 01b
極大・極小と停留点

1 変数の極大点（極小点）

微分可能な 1 変数関数の極小点（極大点）に関する次の定理を紹介します．

Theorem

微分可能な関数 $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ があるとします． f が $c \in]a, b[$ で極小（極大）ならば

$$f'(c) = 0$$

注意　これは中身を理解して欲しい定理です．

注意　定理の状況で f が $c \in]a, b[$ で極小とは，ある正数 $\delta > 0$ に対して

$$f(t) \geq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

が成立することです．

極大点・極小点

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

に対して，f が $\mathrm{P}_0(a,b)$ で極小（resp. 極大）であるとはある $\delta > 0$ が存在して

$$f(x,y) \geq f(a,b) \quad ((x,y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

(resp.

$$f(x,y) \leq f(a,b) \quad ((x,y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

)
が成立するときです.

極大点・極小点であることの必要条件

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

が U の各点 $\mathrm{P} \in U$ で $x,\ y$ について偏微分できると仮定します.

Theorem

f が $\mathrm{P}_0(a,b) \in U$ で極小（極大）ならば

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0 \tag{1}$$

が成立します.

この状況で (1) を満たす点 $\mathrm{P}_0(a,b)$ を f の**停留点**と呼びます.

証明の概略

f が P_0 で極小とします．このときある正数 $\delta > 0$ が存在して

$$f(\mathrm{P}) \geq f(\mathrm{P}_0) \quad (\mathrm{P} \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

ここで

$$F(x) = f(x, b)$$

は少なくとも $a - \delta < x < a + \delta$ で定義されて，

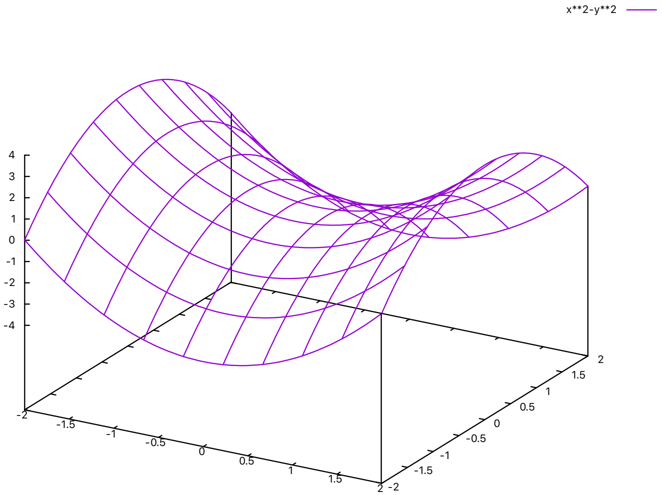
$$F(x) \geq F(a) \quad (a - \delta < x < a + \delta)$$

従って $x = a$ で極小となります．このとき

$$F'(a) = 0 \quad \text{従って} \quad f_x(a, b) = 0$$

となります．

逆は必ずしも真ならず



1変数の定理の証明

f が $t=c$ で極小とする．すなわち，ある正数 $\delta>0$ に対して

$$f(t)\geq f(c)\quad (c-\delta<t<c+\delta)$$

$c<t<c+\delta$ のとき

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\geq 0$$

なので $t\to c+0$ と右極限をとると

$$f'(c)\geq 0$$

$c-\delta<t<c$ のとき

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\leq 0$$

なので $t\to c-0$ と左極限をとると

$$f'(c)\leq 0$$

であることが分かります．よって $f'(c)=0$

右極限・左極限・両側極限

ここで以下を用いています.

片側極限

$F:]a,c[\cup]c,b[\to \mathbf{R}$, $c\in]a,b[$ とします.

$$F(t)\to A \quad (t\to c)$$

ならば

$$F(t)\to A \quad (t\to c+0)$$

かつ

$$F(t)\to A \quad (t\to c-0)$$

実はこの定理の逆も成立しますが，証明は少し難しいです.