

MSF2020L01 04/24 問題 VII

Nobuyuki TOSE

MSF2020, L01 April 24, V03

問題

問題

ある工場が非熟練労働 x 時間, 熟練労働 y 時間を使ってある生産物を

$$Q = F(x, y) = 60x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

単位生産していて, 現在 $x = 64$, $y = 27$ となっているとします.

- (1) 現在の生産量を求めましょう.
- (2) どの方向に (x, y) を変化させれば Q が最も増加するでしょうか?
- (3) 熟練労働を 1.5 時間増加させるが, 生産レベルを保つとします. 非熟練労働はどのように変化させることになるか近似値を求めましょう.

解答 小問(1)

$64 = 4^3, 27 = 3^3$ に注意します. すると

$$F(64, 27) = 60 \times (4^3)^{\frac{2}{3}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}} = 60 \times 4^2 \times 3 = 2,880$$

と現在の生産量が求められます.

Google Chrome—as a calculator

The image shows a Google search bar with the mathematical expression $60 \cdot (4^3)^{(2/3)} \cdot (3^3)^{(1/3)}$ entered. Below the search bar, navigation links for "すべて", "地図", "画像", "ショッピング", "動画", "ニュース", "書籍", "フライト", and "検索ツール" are visible. The search results area displays a calculator interface. The input field shows the expression $60 \cdot ((4^3)^{(2/3)}) \cdot ((3^3)^{(1/3)}) =$ and the result **2880**. The calculator keypad includes buttons for Rad, Deg, x!, (,), %, AC, Inv, sin, ln, 7, 8, 9, ÷, π, cos, log, 4, 5, 6, ×, e, tan, √, 1, 2, 3, −, Ans, EXP, x^y, 0, ., =, and +. A "詳細" (Details) link is located at the bottom right of the calculator. Below the calculator, a button labeled "すべての結果を表示 >" (Show all results >) is present.

解答 小問(2)

$$F_x = 60 \times \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{3}} = 40 \times x^{-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{3}}$$

$$F_y = 60 \times x^{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} = 20 \times x^{\frac{2}{3}} \times y^{-\frac{2}{3}}$$

から

$$F_x(64, 27) = 40 \times (4^3)^{-\frac{1}{3}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}} = 40 \times \frac{1}{4} \times 3 = 30$$

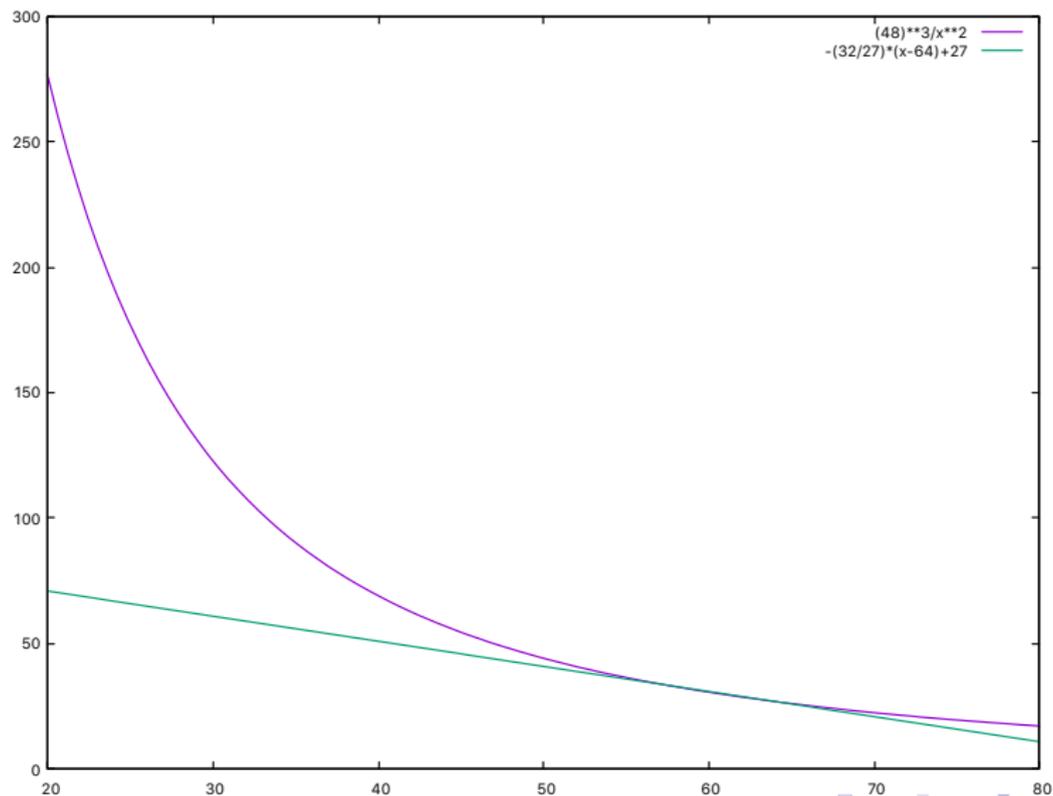
$$F_y(64, 27) = 20 \times (4^3)^{\frac{2}{3}} \times (3^3)^{-\frac{2}{3}} = 20 \times 4^2 \times 3^{-2} = \frac{320}{9}$$

と計算されます。これから

$$\nabla(F)(64, 27) = \begin{pmatrix} 30 \\ \frac{320}{9} \end{pmatrix}$$

の方向が Q を最も増加させる方向です。

Plot by GNUPLOT



解答 小問(3)

(3) 等量曲線

$$F(x, y) = F(64, 27)$$

の $(x, y) = (64, 27)$ における接線

$$30(x - 64) + \frac{320}{9}(y - 27) = 0$$

上で近似的に考えます。熟練労働の時間を $y = 27 + 1.5$ とすると

$$\begin{aligned} x - 64 &= -\frac{320}{9} \times \frac{1}{30} \times 1.5 \\ &= -\frac{16}{9} = -1.77\dots \end{aligned}$$

となりますから非熟練労働の時間を 1.77... 時間減らすこととなります。