

I 次の3点を通る平面の方程式を求めましょう。

(1) $(0, 0, 0), (1, 2, 3), (4, 5, 6)$

(2) $(2, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 4)$

(3) $(1, 2, 3), (-1, 1, 0), (2, -3, 5)$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から原点を通り法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるので、求める平面の方程式は

$$x - 2y + z = 0$$

であることが分かります。

(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

は平面を表して、与えられた3点を通るので、これが求める方程式となります。

(3)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

から平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ であることが分かります。これから求める平面の方程式は

$$-17(x - 1) + (y - 2) + 11(z - 3) = 0$$

となります。