第 1 講義 4 月 24 日　演習問題解答

次の問題 I において 2 本の平行でない 3 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ の両方に垂直な 3 次元ベクトルを求める必要が生じます.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

に対して外積（ベクトル積）

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}, \quad \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

が成立することを用いて計算しましょう．ここで 2 次行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

を用いました.

2 次行列式とベクトル積については第 2 講義と第 3 講義で詳しく勉強します.

I 次の 3 点を通る平面の方程式を求めましょう.
(1) $(0,0,0)$, $(1,2,3)$, $(4,5,6)$
(2) $(2,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,4)$
(3) $(1,2,3)$, $(-1,1,0)$, $(2,-3,5)$

解答 **(1)**

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

から原点を通り法線ベクトルが $\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\1\end{smallmatrix}\right)$ であるので，求める平面の方程式は

$$x - 2y + z = 0$$

であることが分かります.
(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

は平面を表して，与えられた 3 点を通るので，これが求める方程式となります.
(3)

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-17\\1\\11\end{pmatrix}$$

から平面の法線ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix}-17\\1\\11\end{smallmatrix}\right)$ であることが分かります．これから求める平面の方程式は

$$-17(x - 1 + (y - 2)) + 11(z - 3) = 0$$

となります.

II $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．平面

$$ax + by + cz + q = 0$$

と点 (x_0, y_0, z_0) の距離 δ は

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となることを示しましょう．

解答 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の直線 ℓ と平面

$$\pi:\ ax + by + cz + q = 0 \tag{1}$$

の交点 P_1 の座標を求めます．直線 ℓ の上の点の座標は

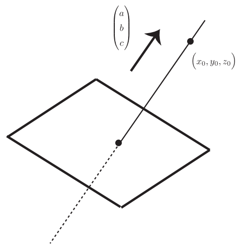
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \\ z_0 + ct \end{pmatrix}$$

となりますから，(1) に代入して

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + q = 0$$

から

$$t = -\frac{az_0 + by_0 + cz_0 + q}{a^2 + b^2 + c^2} \tag{1}$$



であることが分かります．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

なので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}\right| = |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|az_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であることが分かります．

III 偏導関数 f_x と f_y を計算しましょう.
(1) $f(x,y)=(2x+3y)(3x+5y)$ **(2)** $f(x,y)=\frac{x}{1+y^2}$ **(3)** $f(x,y)=(2x+5y)^3$
(4) $f(x,y)=\left(\frac{2x+3y}{x+2y}\right)^2$ **(5)** $f(x,y)=ye^{x+y}$

解答 **(1)**

$$f_x = 2\cdot(3x+5y)+(2x+3y)\cdot 3 = 12x+19y$$
$$f_y = 3\cdot(3x+5y)+(2x+3y)\cdot 5 = 19x+30y$$

(2)

$$f_x = \frac{1}{1+y^2}$$
$$f_y = x\left(-\frac{2y}{(1+y^2)^2}\right) = -\frac{2xy}{(1+y^2)^2}$$

(3)

$$\begin{aligned} f_x &= 2\left(\frac{2x+3y}{x+2y}\right)\frac{2\cdot(x+2y)-(2x+3y)\cdot 1}{(x+2y)^2} \\ &= \frac{2y(2x+3y)}{(x+2y)^3} \\ f_y &= 2\left(\frac{2x+3y}{x+2y}\right)\frac{3\cdot(x+2y)-(2x+3y)\cdot 2}{(x+2y)^2} \\ &= -\frac{2x(2x+3y)}{(x+2y)^3} \end{aligned}$$

(4)

$$f_x = 3(2x+5y)\cdot 2 = 6(2x+5y)^2$$
$$f_y = 3(2x+5y)\cdot 5 = 15(2x+5y)^2$$

(5)

$$f_x = y\cdot e^{x+y}\cdot 1 = ye^{x+y}$$
$$f_y = 1\cdot e^{x+y} + y\cdot e^{x+y}\cdot 1 = (y+1)e^{x+y}$$

Iv 次の曲面の P_0 における接平面を求めましょう。
(1) $z=xy-2x+2y-1$ at $\mathrm{P}_0(0,0,-1)$
(2) $z=\frac{x}{x+y}$ at $\mathrm{P}_0(1,-2,-1)$
(3) $z=x^2-xy+2y^2$ at $\mathrm{P}_0(2,1,4)$
(4) $z=\frac{y}{1+x^2}$ at $\mathrm{P}_0(0,0,0)$

解答 **(1)**

$$z_x = y-2, \quad z_y = x+2$$

から

$$z_x(0,0)=-2, \quad z_y(0,0)=2$$

となります．よって $P_0(0,0,-1)$ における接平面は

$$z=-2x+2y-1$$

であることが分かります．

(2)

$$z_x=\frac{1\cdot(x+y)-x\cdot 1}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2},\quad z_y=\frac{-x}{(x+y)^2}$$

から

$$z_x(1,-2)=-2,\quad z_y(1,-2)=-1$$

となります．よって $P_0(1,-2,-1)$ における接平面は

$$z=-2(x-1)-(y+2)-1$$

であることが分かります．

(3)

$$z_x=2x-y,\quad z_y=-x+4y$$

から

$$z_x(2,1)=3,\quad z_y(2,1)=2$$

となります．よって $P_0(2,1,4)$ における接平面は

$$z=3(x-2)+2(y-1)+4$$

であることが分かります．

(4)

$$z_x=-\frac{y(2x)}{(1+x^2)^2}=-\frac{2xy}{(1+x^2)^2},\quad z_y=\frac{1}{1+x^2}$$

から

$$z_x(0,0)=0,\quad z_y(0,0)=1$$

となります．よって $P_0(0,0,0)$ における接平面は

$$z=y$$

であることが分かります．

V Cobb-Douglas 型生産関数

$$Q = F(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}} \tag{2}$$

に対して $F(10^4 + 100, 625 + (-15))$ の近似値を $K = 10^4,\ L = 625$ における $F_K,\ F_L$ の値を用いて求めましょう．電卓でも計算してみましょう．

解答

$$F_K(K, L) = 3K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}, \quad F_L(K, L) = K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}$$

から $K = 10^4,\ L = 625 = 5^4$ において MPK, MPL が

$$\begin{aligned}
F_K(10^4, 5^4) &= 3 \times \left(10^4\right)^{-\frac{1}{4}} \times \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= 3 \times 10^{-1} \times 5 = 1.5 \\
F_L(10^4, 5^4) &= \left(10^4\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(5^4\right)^{-\frac{3}{4}} \\
&= 10^3 \times 5^{-3} = 8
\end{aligned}$$

と計算されます．さらに

$$F(10^4, 5^4) = 4 \times \left(10^4\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} = 4 \times 10^3 \times 5 = 2.0 \times 10^4$$

も計算できます．以上の準備の下で $F(10^4 + 100, 5^4 + (-15))$ の近似値を求めると

$$\begin{aligned}
F(10^4 + 100, 5^4 + (-15)) &\approx F(10^4, 5^4) + F_K(10^4, 5^4) \times 100 + F_L(10^4, 5^4) \times (-15) \\
&= 2.0 \times 10^4 + 1.5 \times 100 + 8 \times (-15) \\
&= 20,030
\end{aligned}$$

となります．Google Chrome で計算してみると

$$F(10^4 + 100, 5^4 + (-15)) = 20,027.81$$

となります．

VI 以下の曲線 $g(x,y)=0$ の P_0 における接線を求めましょう.
(1) $g(x,y)=x^2+4y^2-1=0$ at $P_0(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})$
(2) $g(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-1=0$ at $P_0(1,1)$
(3) $g(x,y)=x^2-xy+y^2-1=0$ at $P_0(0,1)$

解答 **(1)** $g_x=2x,\ g_y=8y$ から

$$g_x(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})=\sqrt{2},\quad g_y(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})=2\sqrt{2}$$

と計算されます．従って $\mathrm{P}_0(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})$ における接線は

$$\sqrt{2}(x-\frac{1}{\sqrt{2}})+2\sqrt{2}(y-\frac{1}{2\sqrt{2}})=0$$

となります.
(2) $g_x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ g_y=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$ から

$$g_x(1,1)=\frac{1}{3},\quad g_y(1,1)=\frac{1}{3}$$

となりますから，$\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$\frac{1}{3}(x-1)+\frac{1}{3}(y-1)=0$$

となります.
(3) $g_x=2x-y,\ g_y=-x+2y$ から

$$g_x(0,1)=-1,\quad g_y(0,1)=2$$

となりますから，$\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$-1\cdot(x-0)+2(y-1)=0\quad \text{すなわち}\quad -x+2(y-1)=0$$

となります.

VII ある工場が非熟練労働 x 時間，熟練労働 y 時間を使ってある生産物を

$$Q = F(x,y) = 60x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

単位生産していて，現在 $x = 64$, $y = 27$ となっているとします．
(1) 現在の生産量を求めましょう．
(2) どの方向に (x,y) を変化させれば Q が最も増加するでしょうか？
(3) 熟練労働を 1.5 時間増加させるが，生産レベルを保つとします．非熟練労働はどのように変化させることになるか近似値を求めましょう．

解答 **(1)** $64 = 4^3, 27 = 3^3$ に注意します．すると

$$F(64,27) = 60 \times \left(4^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 60 \times 4^2 \times 3 = 2,880$$

と現在の生産量が求められます．
(2)

$$F_x = 60 \times \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{3}} = 40 \times x^{-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{3}}$$
$$F_y = 60 \times x^{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} = 20 \times x^{\frac{2}{3}} \times y^{-\frac{2}{3}}$$

から

$$F_x(64,27) = 40 \times \left(4^3\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 40 \times \frac{1}{4} \times 3 = 30$$
$$F_y(64,27) = 20 \times \left(4^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(3^3\right)^{-\frac{2}{3}} = 20 \times 4^2 \times 3^{-2} = \frac{320}{9}$$

と計算されます．これから

$$\nabla(F)(64,27) = \begin{pmatrix} 30 \\ \frac{320}{9} \end{pmatrix}$$

の方向が Q を最も増加させる方向です．
(3) 等量曲線

$$F(x,y) = F(64,27)$$

の $(x,y) = (64,27)$ における接線

$$30(x-64) + \frac{320}{9}(y-27) = 0$$

上で近似的に考えます．熟練労働の時間を $y = 27 + 1.5$ とすると

$$\begin{aligned} x - 64 &= -\frac{320}{9} \times \frac{1}{30} \times 1.5 \\ &= -\frac{16}{9} = -1.77\ldots \end{aligned}$$

となりますから非熟練労働の時間を $1.77\ldots$ 時間減らすことになります．