偏微分係数・接平面・勾配ベクトル

Nobuyuki TOSE

MSF2020, L01 April 24, V03

内容

Part 01
平面の方程式

平面の方程式

点 P_0 を通り $\vec{n}(\neq \vec{0})$ に垂直な平面 α を考えます．α の任意の点 P に対して

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = 0$$

が成立します．P_0 の座標が (x_0, y_0, z_0)，P の座標が (x, y, z)，

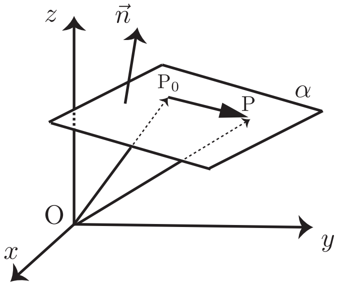
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{であるとき} \quad \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

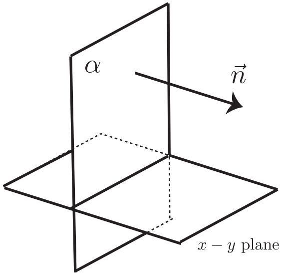
であるので，上の条件は座標を用いると

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

The Equation of a plane

$\vec{n}$ のことを平面の**法線ベクトル** (normal vector) と呼びます.



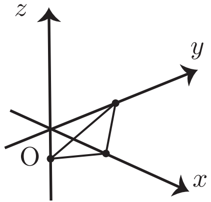


具体例

$$x + y - 2z = 2$$

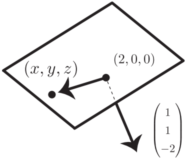
について考えます．通る点を具体的に求めます．

$$\begin{array}{ll} x\text{ 切片} & (2,0,0) \\ y\text{ 切片} & (0,2,0) \\ z\text{ 切片} & (0,0,\text{-}1) \end{array}$$



$(2,0,0)$ を通ることから

$$\begin{array}{rccccccc} & x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ -) & 2 & + & 0 & - & 2\cdot 0 & = & 2 \\ \hline & (x-2) & + & y & - & 2z & = 0 & \end{array}$$



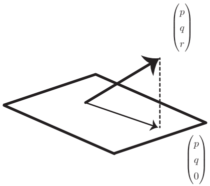
すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

In case $r = 0$

$r = 0$ の場合 $\vec{n}$ は $x - y$ 平面に平行になり，平面 α は $x - y$ 平面に垂直になります.

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \parallel x - y \text{平面}, \quad \alpha \perp x - y \text{平面}$$



Part 02
偏微分係数

Partial Differentiation

$\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

が定義されているとします.

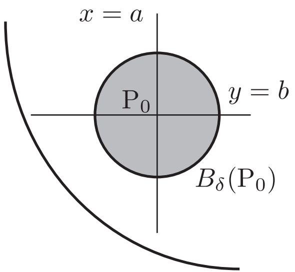
$\mathrm{P}_0(a, b) \in \mathbf{R}^2$ に対して x の関数

$$F(x) := f(x, b)$$

を $x = a$ の近くで定義できます. さらに y の関数

$$G(y) := f(a, y)$$

を $y = b$ の近くで定義することができます.



Partial Differentiation

この状況で，定義の中の極限が存在すれば，x と y に関する**偏微分係数**を

$$f_x(a,b) := F'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

$$f_y(a,b) := G'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$$

と定義できます.

偏微分（幾何的な意味は）

2 変数関数

$$z = f(x, y)$$

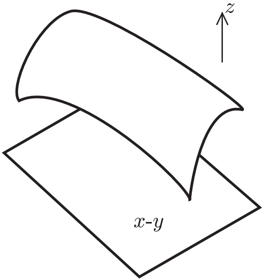
に対して x の関数

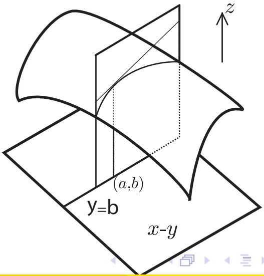
$$F(x) := f(x, b)$$

を考えて, (a, b) における x に関する **偏微分係数**

$$f_x(a, b) = F'(a)$$

を定義します.





Partial Differentiation-An example

$\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + y^3$$

について考えます．$(a,b) \in \mathbf{R}^2$ の周りで考えるとして

$$F(x) := f(x,b) = x^3 + 2xb^2 + b^3, \ \ G(y) := f(a,y) = a^3 + 2ay^2 + y^3$$

と定義します．このとき

$$F'(x) = 3x^2 + 2b^2, \quad \text{and} \quad G'(y) = 4ay + 3y^2$$

から

$$f_x(a,b) = 3a^2 + 2b^2, \quad f_y(a,b) = 4ab + 3b^2$$

を得ます．

Part 03
接平面

Tangent Plane

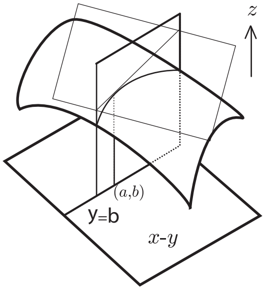
関数 $f(x,y)$ のグラフ

$$z = f(x,y)$$

の $(a,b,f(a,b))$ における接平面を求めます．そのために

$$z = A(x-a) + B(y-b) + f(a,b) \quad (1)$$

の係数 A,B を求めます．



Tangent Plane (2)

接平面と切断面 $y = b$ との交わりは，切断面の上では $z = F(x)$ の $x = a$ における接線となります．さらに (1) に $y = b$ を代入して切断面 $y = b$ 上に制限すると

$$z = A(x - a) + f(a, b)$$

となります．これからこの直線の傾きが A であることが分かり，

$$A = F'(a) = f_x(a, b)$$

であることが分かります．同様に

$$B = f_y(a, b)$$

となりますから，結局，接平面は方程式

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

で表されます．

例

関数

$$z = f(x, y) = 4x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

を $(x, y) = (a, b) = (10^4, 625)$ の周りで考えます．関数 f の偏導関数は

$$f_x(x, y) = 3x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}, \quad f_y(x, y) = x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}$$

となりますから，偏微分係数は

$$f_x(10^4, 625) = 1.5, \quad f_y(10^4, 625) = 8$$

と計算されます．従って $(x, y) = (10^4, 625)$ における接平面は

$$z = 1.5(x - 10^4) + 8(y - 625) + 2.0 \times 10^4$$

であることが分かります．

Part 04
勾配ベクトル・曲線の接線

曲線の接線

曲線 C が 2 変数関数 g を用いて

$$g(x, y) = 0$$

と与えられているとします．例えば単位円は

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

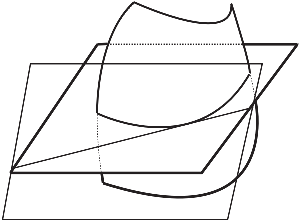
と表されます．C 上の点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ が与えられているときに，C の $\mathrm{P}_0(a, b)$ における接線を求めます．

曲線の接線–3 次元的には

曲面

$$z = g(x, y)$$

の接平面を $(a, b, 0)$ で考えると



$$z = g_x(a, b) \cdot (x - a) + g_y(a, b) \cdot (y - b) \tag{2}$$

となります.

接平面と $x - y$ 平面の交わりは $x - y$ 座標では

$$g_x(a, b) \cdot (x - a) + g_y(a, b) \cdot (y - b) = 0 \tag{3}$$

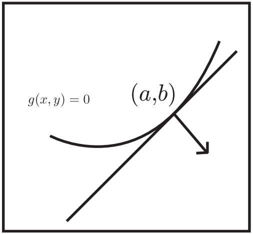
となります. これは接線の方程式となります.

Gradient Vector

方程式 (3) は内積を用いて

$$\begin{pmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = 0$$

と表されます.

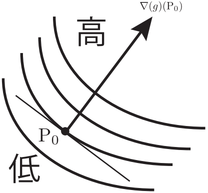


これからベクトル

$$\nabla(g)(a,b) := \begin{pmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{pmatrix}$$

が接線に垂直であることが分かります. $\nabla(g)(a,b)$ を g の (a,b) における **勾配ベクトル（gradient vector）** と呼びます.

Gradient Vector —その向きは？



勾配ベクトルは g が大きくなる方向に向いています．登っていくときに最もきつい方向です．

例

単位円 $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ について考えます．g の偏導関数は

$$g_x = 2x, \quad g_y = 2y$$

ですから，したがって単位円上の点 (a,b) の接線は

$$2a(x-a) + 2b(y-b) = 0$$

となります.

陰関数の微分

曲線 C が (a, b) の近くで $y = \varphi(x)$ と表されていて，$g_y(a, b) \neq 0$ が成立するとします．このとき (a, b) における接線は

$$y = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}(x - a) + b$$

となりますから，接線の傾きを考えて

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

であることが分かります．例えば曲線（単位円）$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ を $b > 0$ を満たす (a, b) で考えると，曲線は直接的には

$$y = \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

と表されますが，

$$\varphi'(a) = -\frac{2a}{2b} = -\frac{a}{b}$$

が成立することが分かります．