線型代数 L02 Part 01.

Part 01. a 行の + と スカラー倍.

第5章 行列の演算について

5.1 ベクトルの演算の性質（復習）

n = 2, 3.

ベクトルの足し算とスカラー倍に関する基本的な定理 5.1 を述べましょう．

定理 5.1. **(1)** $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{5.1}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{5.2}$$

が成立します．

(2) $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{K}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ に対して

$$\lambda\,(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \tag{5.3}$$

$$(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \tag{5.4}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \tag{5.5}$$

が成立します．

5.2 行列の和・差とスカラー倍

同じ型を持つ，すなわち同じ行数，列数を持つ行列の間には足し算（加法）と引き算（減法）が定義されます．$m \times n$ 行列，すなわち m 行 n 列の行列

行ベクトル表示

$$A = \underbrace{(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_j \cdots \vec{a}_n)}_{\text{列ベクトル表示.}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = \underset{i\text{行}j\text{列.}}{(a_{ij})}\,,\ B = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_j \cdots \vec{b}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} = (b_{ij})$$

に対してその和と差を

j列　　i行

$$A+B=\left(\vec{a}_1+\vec{b}_1\cdots\boxed{\vec{a}_j+\vec{b}_j}\cdots\vec{a}_n+\vec{b}_n\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boxed{\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{b}_i}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m\end{pmatrix}=(a_{ij}+b_{ij})$$

j列　　i行j列.

$$A-B=\left(\vec{a}_1-\vec{b}_1\cdots\boxed{\vec{a}_j-\vec{b}_j}\cdots\vec{a}_n-\vec{b}_n\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boxed{\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{b}_i}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{b}_m\end{pmatrix}=(a_{ij}-b_{ij})$$

i行

と定めます．また定数 $\alpha\in\mathbf{K}$ に対して A の α 倍を

$$\alpha A=(\alpha\vec{a}_1\ \cdots\ \alpha\vec{a}_j\ \cdots\ \alpha\vec{a}_n)=\begin{pmatrix}\alpha\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boxed{\alpha\boldsymbol{a}_i}\\ \vdots\\ \alpha\boldsymbol{a}_m\end{pmatrix}=(\alpha\cdot a_{ij})$$

で定義します．次に例

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\ \alpha&\beta&\gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d&e&f\\ \delta&\varepsilon&\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+d&b+e&c+f\\ \alpha+\delta&\beta+\varepsilon&\gamma+\varphi\end{pmatrix}$$

$$\mu\begin{pmatrix}a&b&c\\ \alpha&\beta&\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu a&\mu b&\mu c\\ \mu\alpha&\mu\beta&\mu\gamma\end{pmatrix}$$

を見て理解を深めましょう．

　これまで $m\times n$ 行列 A，B に対して和・差とスカラー倍（定数倍）を定義しました．この 2 つの**優先順位**について注意します．すなわち $\lambda A\pm\mu B$ ですが，

$$\lambda A\pm\mu B=(\lambda A)\pm(\mu B)$$

とスカラー倍を計算した後に足し算・引き算をするのが唯一可能な計算順序です．

定理 5.2. m 行 n 列の行列 A，B，C に対して，以下が成立します．

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$　結合則 → $A+B+C$.

(3) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

(4) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

(5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$A_1,\cdots,A_\ell$　$m\times n$ 行列　$A_1+\cdots+A_\ell$.

各自示す.

Proof. 以下では $A = (\vec{a}_j)$, $B = (\vec{b}_j)$, $C = (\vec{c}_j)$ と行列 A, B, C の j 列を用いて定理を示します．
(1) $A + B = (\vec{a}_j + \vec{b}_j) = (\vec{b}_j + \vec{a}_j) = B + A$ から証明できます．ここで定理 5.1 の (5.1) を用いました．
(2) $(A+B)+C = (\vec{a}_j + \vec{b}_j) + (\vec{c}_j) = \Big((\vec{a}_j + \vec{b}_j) + \vec{c}_j\Big) = \Big(\vec{a}_j + (\vec{b}_j + \vec{c}_j)\Big) = A + (B + C)$ から証明できます．ここで定理 5.1 の (5.2) を用いました．
(3), **(4)**, **(5)**, については演習 5.1 とします．　□

演習 5.1. 定理 *5.2* の **(3)**, **(4)**, **(5)** を証明しましょう． → ビデオ.

Part 01.e

5.3　行列の積

5.3.1　行列 × 列ベクトル

$\vec{a}_j \in \mathbb{K}^m$

次に行列に右からベクトルを掛けることを考えます．上に与えた $m \times n$ 行列 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n)$ と n 次元列ベクトル $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$，すなわち

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \quad と \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n. \tag{5.6}$$

$\in \mathbb{K}^m$

との積を

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbf{K}^m$$

← 基本.

と定義します．この両辺の第 i 成分に着目すると

p_i 成分

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= x_1 \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + x_j \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{x_1 a_{i1} + \cdots + x_j a_{ij} + \cdots + x_n a_{in}} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j a_{ij} \\ \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります．ここで $\vec{p} = A\vec{x} = {}^t(p_1\ p_2\ \cdots\ p_m)$ と成分表示すると，$A\vec{x}$ の第 i 成分は

$$p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = (a_{i1} \cdots a_{ij} \cdots a_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}$$

$\vec{a}, \vec{e} \in \mathbb{K}^2$

$$\boxed{(\vec{a}\ \vec{e})}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{e} = x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & e_1 \\ a_2 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x a_1 + y e_1 \\ x a_2 + y e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1\ e_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ (a_2\ e_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\vec{a}, \vec{e} \in \mathbb{K}^3$

$$\boxed{(\vec{a}\ \vec{e})}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x a_1 + y e_1 \\ x a_2 + y e_2 \\ x a_3 + y e_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & e_1 \\ a_2 & e_2 \\ a_3 & e_3 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} (a_1\ e_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ (a_2\ e_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ (a_3\ e_3)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\vec{a}, \vec{e}, \vec{c} \in \mathbb{K}^3$

$$= x\vec{a} + y\vec{e} + z\vec{c}$$

$$\boxed{(\vec{a}\ \vec{e}\ \vec{c})}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & e_1 & c_1 \\ a_2 & e_2 & c_2 \\ a_3 & e_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x a_1 + y e_1 + z c_1 \\ x a_2 + y e_2 + z c_2 \\ x a_3 + y e_3 + z c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1\ e_1\ c_1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ (a_2\ e_2\ c_2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ (a_3\ e_3\ c_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

となり，これから $A\vec{x}$ の成分表示

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad A\,\vec{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\ \vec{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i\ \vec{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

を得ます．

上で見たように $m \times n$ 行列 A を n 次元ベクトル $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ に左から掛けると m 次元ベクトル $A\vec{x} \in \mathbf{K}^m$ を得ます．ここで

$$F_A(\vec{x}) = A\vec{x}$$

と定めると写像

$$F_A : \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m \quad \vec{x} \mapsto A\vec{x} \tag{5.7}$$

を定義できます．この写像 F_A について次の定理 5.3 が成立し，これを F_A の**線型性**といいます．

定理 5.3.

$$F_A(\vec{x}+\vec{y}) = F_A(\vec{x}) + F_A(\vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n) \tag{5.8}$$

$$F_A(\lambda\vec{x}) = \lambda F_A(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbf{K}^n,\ \lambda \in \mathbf{K}) \tag{5.9}$$

$\boxed{(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}}$

$A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x}+A\vec{y}$

Proof. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ と $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の成分表示をします．すると

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_j+y_j \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

$A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x})$

$$\begin{aligned} F_A(\vec{x}+\vec{y}) &= (x_1+y_1)\vec{a}_1 + \cdots + (x_j+y_j)\vec{a}_j + \cdots + (x_n+y_n)\vec{a}_n \\ &= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n + y_1\vec{a}_1 + \cdots + y_j\vec{a}_j + \cdots + y_n\vec{a}_n \\ &= F_A(\vec{x}) + F_A(\vec{y}) \\ F_A(\lambda\vec{x}) &= (\lambda x_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\lambda x_j)\vec{a}_j + \cdots + (\lambda x_n)\vec{a}_n \\ &= \lambda(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n) = \lambda F_A(\vec{x}) \end{aligned}$$

$\lambda(x_j\vec{a}_j)$　　$\lambda(x_1\vec{a}_1)$

$\lambda A\vec{x}$

$A(\lambda\vec{x})$

$$\lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_j \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

から証明されます． □

$\boxed{\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}}$

$\lambda\vec{a}_1 + \lambda\vec{a}_2 + \cdots + \lambda\vec{a}_n = \lambda(\vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_n)$

(5.8) と (5.9) は行列の積の形では

$$A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \quad A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) \tag{5.10}$$

と表されます．これをまとめて得られる

$\vec{x}_j \in \mathbb{K}^n$

$$A(\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_\ell) = A\vec{x}_1 + \cdots + A\vec{x}_\ell$$

$A(\lambda\vec{x}) + A(\mu\vec{y}) = \lambda(A\vec{x}) + \mu(A\vec{y})$

$$A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y} \tag{5.11}$$

および (5.10) を繰り返して得られる

$$A(c_1\vec{x}_1+\cdots+c_\ell\vec{x}_\ell) = c_1A\vec{x}_1+\cdots+c_\ell A\vec{x}_\ell \tag{5.12}$$

も有用です．この公式 (5.12) は $\boxed{X = (\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_\ell)}$ と $\vec{c} = {}^t(c_1 \ \cdots \ c_\ell)$ を用いて

n行ℓ列

$$A(X\vec{c}) = (AX)\vec{c} \tag{5.13}$$

$= (A\vec{x}_1 \cdots A\vec{x}_\ell)$

とも表現できます．これは，後に行列の積の結合法則の証明で用いることになります．

行べ.定義.

演習 5.2. (5.11) と (5.12) を証明しましょう．

5.3.2 行ベクトル × 行列

行列の左から行ベクトルを掛けることも必要になります．$n \times \ell$ 行列 X が，行ベクトル表示と列ベクトル表示

$$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_k \cdots \vec{x}_\ell) \tag{5.14}$$

n行ℓ列.

を持っているとします．この X に左から n 次元行ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1 \ \cdots a_j \ \cdots \ a_n)$ を掛けることを

$$\boldsymbol{a}X = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \boxed{a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_j\boldsymbol{x}_j+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n}$$

と ℓ 次元行ベクトルとして定義します（$\boldsymbol{x}_j$ が ℓ 次元行ベクトルであることに注意しましょう）．X の行ベクトルの各成分を用いて $\boldsymbol{a}X$ を計算してみると

$$\begin{aligned} \cancel{\boldsymbol{a}X} &= a_1(x_{11}\cdots x_{1k}\cdots x_{1\ell}) \quad \boldsymbol{x}_1 \\ &\quad +\cdots \\ &\quad +a_j\boxed{(x_{j1}\cdots x_{jk}\cdots x_{j\ell})} \quad \boldsymbol{x}_j \\ &\quad +\cdots \\ &\quad +a_n\boxed{(x_{n1}\cdots x_{nk}\cdots x_{n\ell})} \leftarrow \boldsymbol{x}_n \end{aligned}$$

中成分

$(a_1 \cdots a_j \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{jk} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} = a\vec{x}_k$

$= (\ \cdots \ \boxed{a_1x_{1k}+\cdots+a_jx_{jk}+\cdots+a_nx_{nk}} \ \cdots \ )$

$= (a\vec{x}_1 \cdots a\vec{x}_k \cdots a\vec{x}_\ell) = aX$

となります．このことから $\boldsymbol{a}X$ の第 k 成分は行ベクトル $\boldsymbol{a}$ と X の k 列 $\vec{x}_k$ の積

$(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a$

$(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b$

$(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c$

$$a_1x_{1k} + \cdots + a_jx_{jk} + \cdots + a_nx_{nk} = (a_1 \ \cdots \ a_j \ \cdots \ a_n)\begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{jk} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\vec{x}_k$$

として表現できます．このことから

$a(\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_k \cdots \vec{x}_\ell)$

$$\boldsymbol{a}X = (\boldsymbol{a}\vec{x}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}\vec{x}_k \ \cdots \ \boldsymbol{a}\vec{x}_\ell)$$

と $\boldsymbol{a}X$ の成分が表現できます．

演習 5.3. 3 次元の標準単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = (1\ 0\ 0)$，$\boldsymbol{e}_2 = (0\ 1\ 0)$，$\boldsymbol{e}_3 = (0\ 0\ 1)$ と 3 行の行列 $X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{e}_1X$，$\boldsymbol{e}_2X$，$\boldsymbol{e}_3X$ を計算しましょう．また $(0\ \lambda\ 0)X$，$(1\ 0\ \lambda)X$ も計算しましょう．

Part 01c.

$A := (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$　$\vec{a}_j \in \mathbb{K}^m$，$\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ のとき

$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$

5.3.3　行列 × 行列

定義　さらに $m \times n$ 行列 A に対して $n \times \ell$ 行列 $X = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_\ell)$ を右から掛けるには，X の列ベクトルが $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k, \cdots, \vec{x}_\ell \in \mathbb{K}^n$ と ℓ 個の n 次元ベクトルであることに注意して，

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_m \end{pmatrix}(\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_\ell)$　$\vec{x}_k$　$A\vec{x}_k$

$$AX = (A\vec{x}_1\ A\vec{x}_2\ \cdots\ A\vec{x}_\ell) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\ \vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\ \vec{x}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_1\ \vec{x}_\ell \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_\ell \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\ \vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\ \vec{x}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_m\ \vec{x}_\ell \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

$\begin{pmatrix} a_1\vec{x} \\ \vdots \\ a_m\vec{x} \end{pmatrix}$

と定義します．AX の列ベクトル $A\vec{x}_k$ が m 次元ベクトルであることから，AX は $m \times \ell$ 行列であることが分かります．また $X = (x_{jk})$，$P = AX = (p_{ik})$ と成分表示をすると P の (i,k) 成分は

$$p_{ik} = \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{jk}$$

a_i: X.

となります．

演習 5.4. 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$ に対して次の積を計算しましょう．

(1) $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　**(2)** $A\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　**(3)** $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　**(4)** $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

さらに行ベクトル表示 (5.6) を持つ $m \times n$ 行列 A と X の積 AX は

$$AX = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 X \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i X \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m X \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

とも表示されます．ここで

$$\boxed{\boldsymbol{a}_i X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_i \vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i \vec{x}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_i \vec{x}_n \end{pmatrix}}$$

であることに注意すると，行ベクトル表示を用いた積 AX が (5.15) にある列ベクトル表示を用いた積と一致して，定義が整合的であることが分かります．

例 5.1. 3 行の行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ に演習 *5.4* の積に現れた行列を左から掛けましょう．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = A$$

1r⇔3r →
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

1r += 3r×λ →
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

2回

2r ×= λ →
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$
(λ≠0)

この計算は，後に行列の基本変形が基本行列を掛けることに他ならないことを示すのに用います．

演習 5.5. 3 行の行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ に対して次の積を計算しましょう．

$$
\textbf{(1)}\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A \quad \textbf{(2)}\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\lambda&0&1\end{pmatrix}A \quad \textbf{(3)}\ \begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A
$$

演習 5.6. 行ベクトル $\boldsymbol{x} = (p\ q\ r)$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}\cdot{}^t\boldsymbol{x}$ を計算しましょう．

Part old

行3.4.9

演算の規則.

$A=(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$

$\vec{a}_j \in \mathbb{K}^m$

線型写像の合成　A を $m\times n$ 行列，B を $n\times\ell$ 行列とします．(5.7) で説明しましたが，A と B はそれぞれ線型写像

$= c_1\vec{e}_1 + \cdots + c_\ell\vec{e}_\ell \in \mathbb{K}^n$

$$
F_B:\ \mathbf{K}^\ell \longrightarrow \mathbf{K}^n \quad \vec{c}\mapsto B\vec{c} = \vec{x}
$$
$$
F_A:\ \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m \quad \vec{x}\mapsto A\vec{x}
$$

$\vec{c} \in \mathbb{K}^\ell$

$x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbb{K}^m$

$= (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_\ell)$

$\vec{e}_k \in \mathbb{K}^n$

を定めます．この写像 F_A と F_B の合成

$$
F_A\circ F_B:\ \mathbf{K}^\ell \longrightarrow \mathbf{K}^m \quad \vec{c}\mapsto F_A(\underbrace{F_B(\vec{c})}_{\in \mathbb{K}^n}) = A(B\vec{c})
$$

について考えます（写像の合成についてはこのすぐ後にある囲み解説を参照）．演習 5.2 の (5.12) で示したことを用いて，$F_A(F_B(\vec{c})) = A(B\vec{c})$ を考えます．そのために $B = (\vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_\ell)$，$\vec{c} = {}^t(c_1\cdots c_\ell)$ と行列 B とベクトル $\vec{c}$ の成分を定めます．すると

$\vec{c} = \begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_\ell\end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
F_A(F_B(\vec{c})) &= A(B\vec{c}) = A\left(c_1\vec{b}_1+\cdots+c_\ell\vec{b}_\ell\right)\\
&= c_1A\vec{b}_1+\cdots+c_\ell A\vec{b}_\ell = \left(A\vec{b}_1\ \cdots\ A\vec{b}_\ell\right)\vec{c} = (AB)\vec{c} = F_{AB}(\vec{c})
\end{aligned}
$$

線型性.

から

$$
F_A\circ F_B = F_{AB}
$$

を得ます．また行列の積の結合法則 に関する定理 5.4**(4)** の証明に用いる

$$
A\,(B\vec{c}) = (AB)\,\vec{c} \tag{5.17}
$$

も同時に示しました．

写像の合成 2 つの写像 $f:\ X\to Y$ と $g:\ Y\to Z$ があるとします．このとき

$$
g\circ f:\ X\to Z \quad x\mapsto g(f(x))
$$

が定義できます．これを f と g の合成写像と呼びます．
さらに写像 $h:\ Z\to W$ がある場合は

$$
h\circ g\circ f:\ X\to W
$$

が定義できますが，これは

$$
h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f
$$

と，合成をどの順序で行っても変わりません．

各自示す.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend left=50, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] \arrow[rrr, bend right=60, "h\circ(g\circ f)"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & Z \arrow[r, "h"] & W
\end{tikzcd}
$$

$\|$

5.3.4 行列の積の性質

行列の積について以下の定理 5.4 が成立します．

定理 5.4. A と B は $m \times n$ 行列，X と Y は $n \times \ell$ 行列，Q は $\ell \times g$ 行列とします．このとき次が成立します．
(1) $(A+B)X = AX + BX$
(2) $A(X+Y) = AX + AY$
(3) $A(\alpha X) = (\alpha A)\,X = \alpha(AX)$
(4)（結合法則） $(AX)\,Q = A\,(XQ)$

この定理 5.4 の証明の準備として $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$，$B = \left(\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n\right)$ と $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ に対して

(1)

$$(A+B)\,\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} \tag{5.18}$$

を示します．実際

$\lambda(\vec{a}+\vec{c}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{c}$

$$\begin{aligned}(A+B)\vec{x} &= \left(\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \;\cdots\; \vec{a}_n + \vec{b}_n\right)\vec{x} \\ &= x_1(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + \cdots + x_n(\vec{a}_n + \vec{b}_n) \\ &= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n + x_1\vec{b}_1 + \cdots + x_n\vec{b}_n = A\vec{x} + B\vec{x}\end{aligned}$$

と示すことができます．また (5.10) で以下の最初の等号を示しましたが $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ と $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して

線型性

$$A(\alpha\vec{x}) = \alpha\,(A\vec{x}) = (\alpha A)\vec{x} \tag{5.19}$$

が成立することも定理 5.4 の **(3)** の証明で使います．実際，2 番目の等号は $\vec{x} = {}^t(x_1 \;\cdots\; x_n)$ として

$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}(\alpha A)\,\vec{x} &= \left(\alpha\vec{a}_1 \;\;\cdots\;\; \alpha\vec{a}_n\right)\vec{x} \\ &= x_1\alpha\vec{a}_1 + \cdots + x_n\alpha\vec{a}_n = \alpha(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n) = \alpha(A\vec{x})\end{aligned}$$

と示すことができます．

Proof. （**定理 5.4 の証明**）**(1)** 両辺の k 列を比較します．

$$(A+B)\vec{x}_k = A\vec{x}_k + B\vec{x}_k$$

から分かります（(5.18) 参照）．
(2) 両辺の k 列を比較します．

$$A\,(\vec{x}_k + \vec{y}_k) = A\vec{x}_k + A\vec{y}_k$$

から分かります（(5.10) 参照）．

$$\begin{aligned}(A+B)(\cdots\ \vec{x}_k\ \cdots) &= (\cdots\ (A+B)x_k\ \cdots) \\ &= (\cdots\ A\vec{x}_k + Bx_k\ \cdots) \\ &= (\cdots\ A\vec{x}_k\ \cdots) + (\cdots\ B\vec{x}_k\ \cdots) \\ &= AX + BX.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A(X+Y) &= A(\cdots\ \vec{x}_k + \vec{y}_k\ \cdots) \\ &= (\cdots\ A(\vec{x}_k + \vec{y}_k)\ \cdots) \\ &= (\cdots\ A\vec{x}_k + A\vec{y}_k\ \cdots) = (\cdots\ A\vec{x}_k\ \cdots) + (\cdots\ A\vec{y}_k\ \cdots) \\ &= AX + AY.\end{aligned}$$

$A(\cdots \alpha\vec{x}_k \cdots) = (\cdots A(\alpha\vec{x}_k) \cdots)$

$\alpha A(\cdots \vec{x}_k \cdots) = (\cdots (\alpha A)\vec{x}_k \cdots)$

αAX $= (\cdots \alpha(A\vec{x}_k) \cdots)$

(3) 各辺の k 列を比較しますが (5.19) は

$$A(\alpha\vec{x}_k) = (\alpha A)\vec{x}_k = \alpha(A\vec{x}_k)$$

を導きます.

(4) (5.17) を用いると $\vec{q} \in \mathbf{K}^n$ に対して　ℓ　$\vec{q} \in \mathbb{K}^\ell.$

$A: m\times n,\ X: n\times\ell.$

$$A\,(X\vec{q}) = (AX)\,\vec{q}$$

が成立します．Q の t 列を $\vec{q}_t$ とすると　$Q = (\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_t \cdots \vec{q}_g)$ $\ell\times g.$

$A(XQ) = A(\cdots X\vec{q}_t \cdots)$

$$A\,(X\vec{q}_t) = (AX)\,\vec{q}_t$$

$= (\cdots A(X\vec{q}_t) \cdots)$

ですが，これは示すべき式の t 列が等しいことを意味します．これを用いると

$= (\cdots (AX)\vec{q}_t \cdots)$

$= (AX)(\cdots \vec{q}_t \cdots)$

$$\begin{aligned} A(XQ) &= A(X\vec{q}_1 \ \cdots \ X\vec{q}_g) = (A(X\vec{q}_1) \ \cdots \ A(X\vec{q}_g)) \\ &= ((AX)\vec{q}_1 \ \cdots \ (AX)\vec{q}_g) = (AX)(\vec{q}_1 \ \cdots \ \vec{q}_g) = (AX)Q \end{aligned}$$

と行列の積の結合法則が証明されます. □

この定理 5.4**(4)** にある行列の積の結合法則の意義ですが，これがあるから $m \times n$ 行列 A と $n \times \ell$ 行列 B，$\ell \times p$ 行列 C の 3 つの行列を掛けるとき

$$(AB)C = A(BC)$$

$AB: m\times\ell$　$(AB)C.$ $m\times p.$

となるので，掛ける順序に結果がよらないことが分かります．これがあるので，この積を ABC と記述してもよいことが分かります．

$A: m\times n,\ B: n\times\ell,\ C: \ell\times p.$

ABC と書いても 大丈夫.

$BC: n\times p$

$\rightsquigarrow A(BC)$ $m\times p.$

Part 1 ✓