2次曲面

$A \in M_3(\mathbb{R})$ は実対称行列, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ とする. $A \neq O_3$

のとき

$$(\#) \quad \left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) + 2\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) + c = 0$$

を満たす $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ を2次曲面と呼ぶ.

大まかな分類.

Ⅰ $\mathrm{rank}(A) = 3$ のとき. $(\Leftrightarrow \det(A) \neq 0)$

Ⅱ $\mathrm{rank}(A) = 2$ のとき.

(i) $\vec{b} \notin \mathrm{Im}(A)$

(ii) $\vec{b} \in \mathrm{Im}(A)$

Ⅲ $\mathrm{rank}(A) = 1$ のとき.

(i) $\vec{b} \notin \mathrm{Im}(A)$

(ii) $\vec{b} \in \mathrm{Im}(A)$

A は正則.

(I) rank$(A) = 3$ のとき. 平行移動の座標変換

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}, \quad \vec{v_0} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$$

を用いて(＃)を X, Y, Z の1次の項のない形にできる.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(A\left(\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} + \vec{v_0}\right), \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} + \vec{v_0}\right) + 2\left(\vec{e}, \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} + \vec{v_0}\right) + c$$

$$= \underbrace{\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\right)}_{2次}$$

各項再確認

$$+ \underbrace{2\left(\overbrace{\vec{e} + A\vec{v_0}}^{=\vec{0}}, \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\right)}_{1次}$$

$$+ \underbrace{(\underbrace{A\vec{v_0}}_{-\vec{e}}, \vec{v_0}) + 2(\vec{e}, \vec{v_0}) + c}_{定数項}$$

と展開すると(＃)は $\vec{v_0} = -A^{-1}\vec{e}$ のとき. $A\vec{v_0} = -\vec{e}$

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\right) + \boxed{(\vec{e}, \vec{v_0}) + c} = 0$$

$= c'$

とできる. 以下 $c' = (\vec{e}, \vec{v_0}) + c$ とする.

A を直交行列 P によって

$$\boxed{{}^tPAP = \begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}}$$

とすると直交座標変換 $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$ によって

$$\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 + c' = 0$$

とできる.

$\alpha\beta\gamma = |A| \neq 0$

α, β, γ の符号について分類. 正の固有値 + 負の固有値 $= 3$.
の個数

(I-i) $\boxed{\alpha, \beta, \gamma > 0 \text{ のとき}}$　$\alpha = \frac{1}{\omega_1^2}$, $\beta = \frac{1}{\omega_2^2}$, $\gamma = \frac{1}{\omega_3^2}$

とすると　($\omega_1, \omega_2, \omega_3 > 0$ とする)

$$\left(\frac{\xi}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\omega_3}\right)^2 + c' = 0$$

となる。　$\rightsquigarrow \overset{\vee}{0}$

① $c' > 0$ のとき　空集合.　② $c' = 0$ のとき.

$\xi = \eta = \zeta = 0$ から

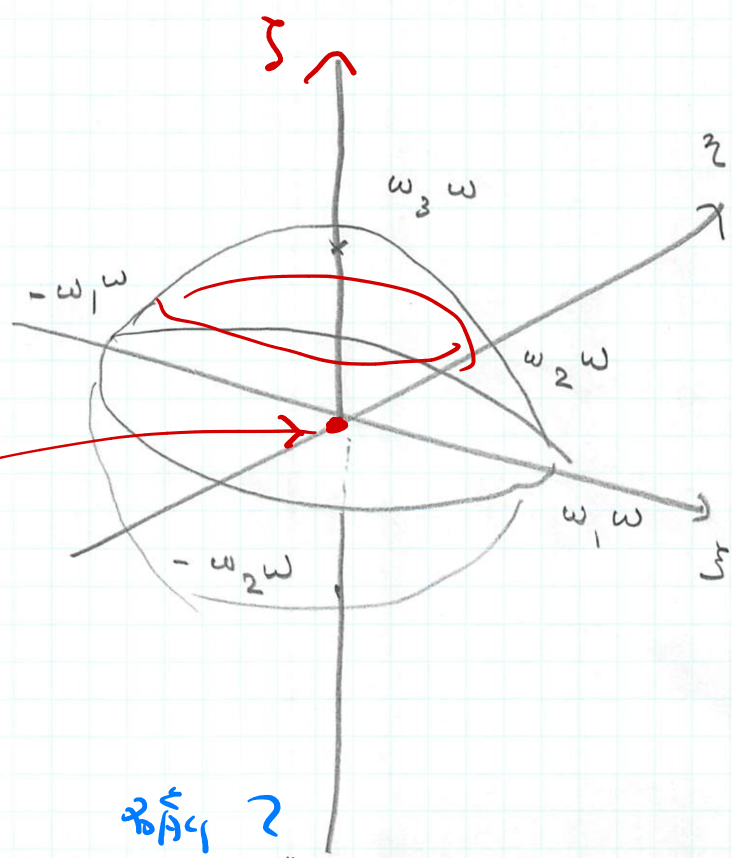
$x = \cancel{\alpha_1}\ x_0$, $y = \cancel{\alpha_2}\ y_0$, $z = \cancel{\alpha_3}\ z_0$

の1点.

$p, q, r \geqq 0$ のとき

$p + q + r = 0 \iff p = q = r = 0$

③ $c' < 0$ のとき.　$-c' = \omega^2$ とすると ($\omega > 0$)



(x_0, y_0, z_0)

楕円?

(I-ii) $\alpha, \beta > 0$, $\gamma < 0$ のとき. $\omega_j > 0$ として $(j = 1, 2, 3)$

$\alpha = \frac{1}{\omega_1^2}$, $\beta = \frac{1}{\omega_2^2}$, $\gamma = -\frac{1}{\omega_3^2}$ とおいて (#) を

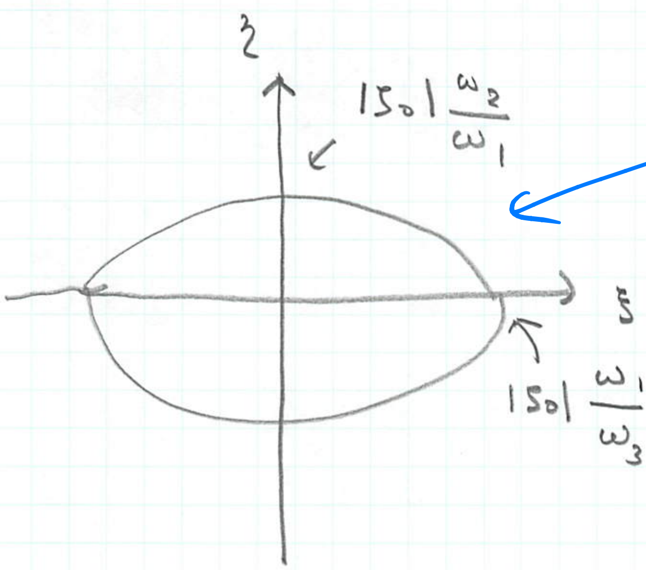
$$\left(\frac{\xi}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\omega_2}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{\omega_3}\right)^2 + c' = 0$$

と表す.

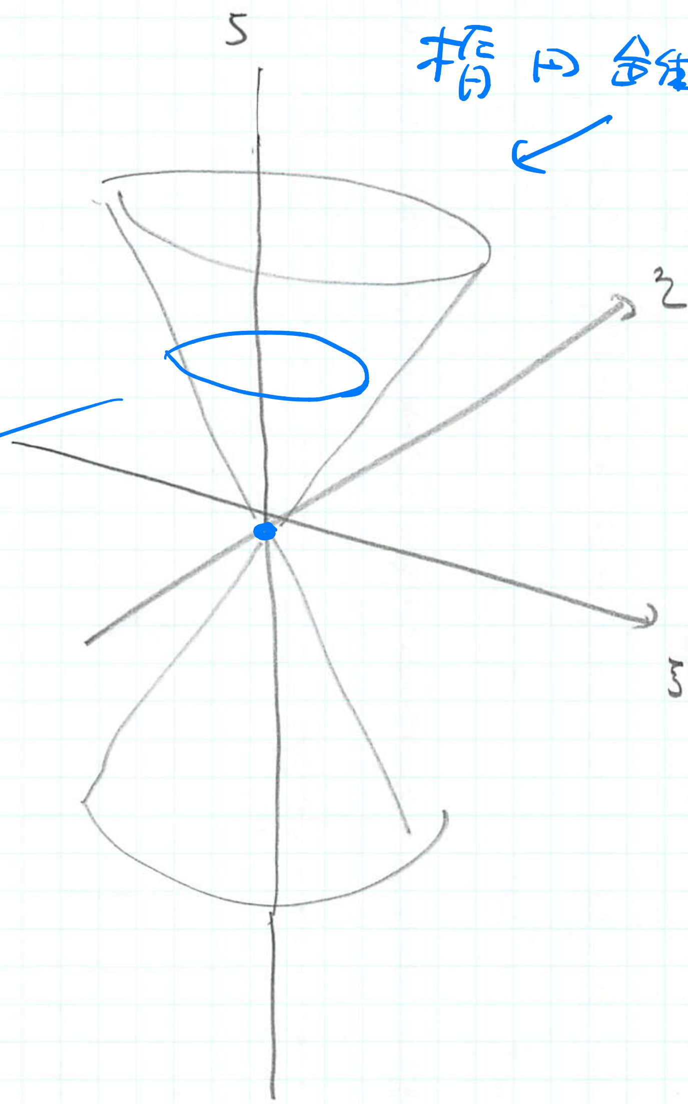
① $c' = 0$ のとき.

楕円錐.

$\zeta = \zeta_0 \neq 0$ の断面は



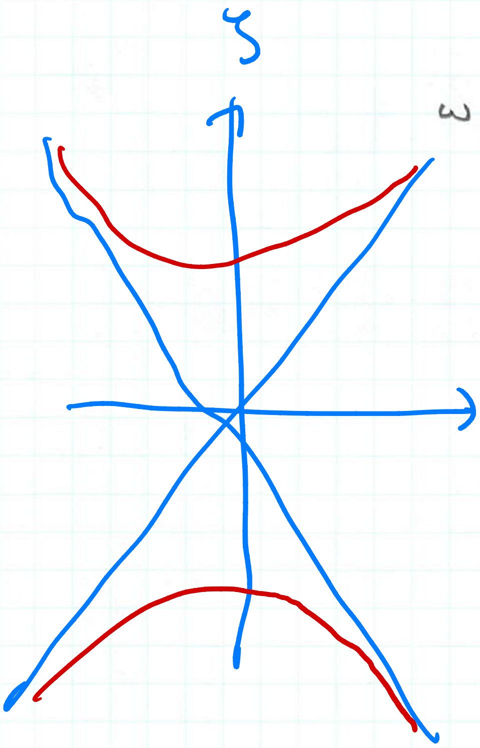
と楕円になる.

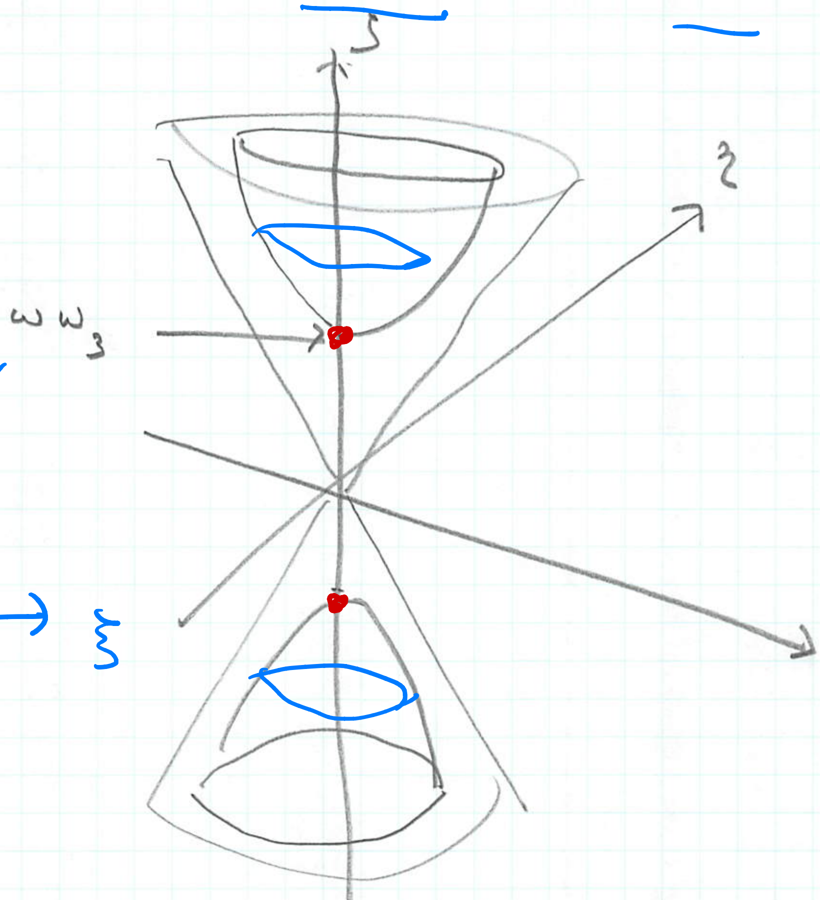


② $c' > 0$ のとき $c' = \omega^2$, $\omega > 0$ とする.

$$\left(\frac{\xi}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\omega_2}\right)^2 = \left(\frac{\zeta}{\omega_3}\right)^2 - \omega^2$$

とみると $\zeta = \zeta_0$ の断面は $\zeta_0^2 < \omega^2 \omega_3^2$ のとき空集合となる. $\zeta_0^2 \geqq \omega^2 \omega_3^2$ のときは楕円または1点となる.





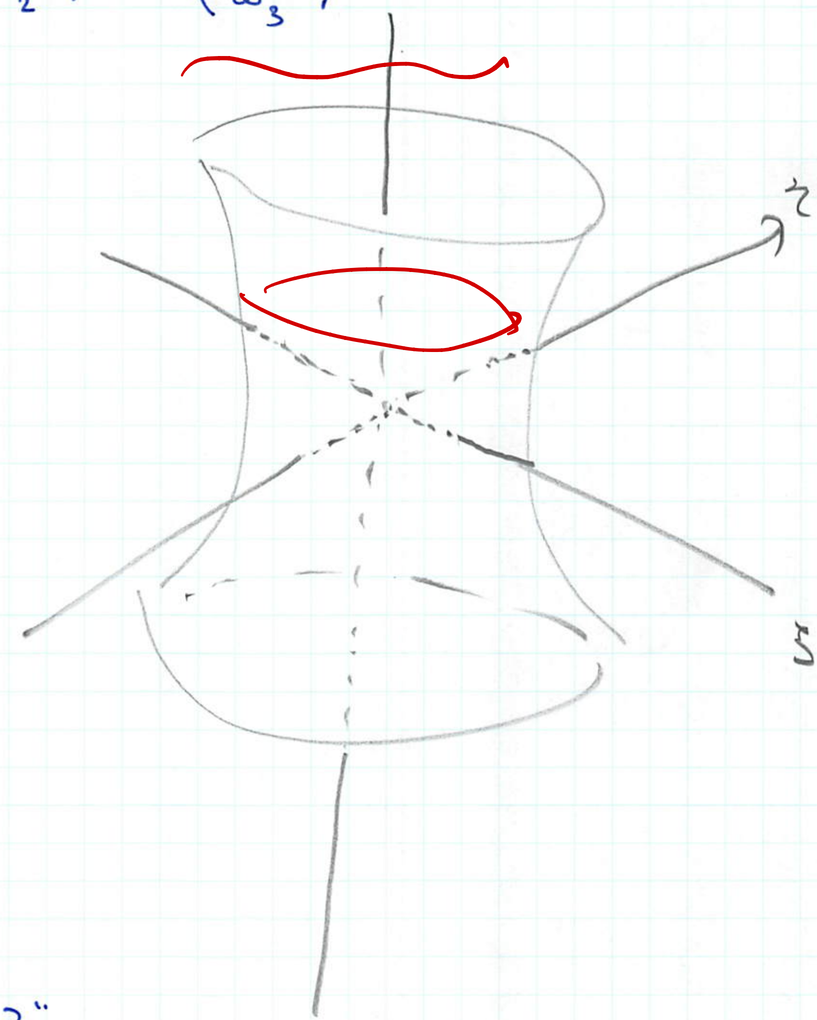
二葉双曲面と呼ぶ.

楕円錐に漸近する

$\xi - \zeta$ 平面, $\eta - \zeta$ 平面による断面

③ $c'<0$ のとき $c'=-\omega^2$, $\omega>0$ とすると

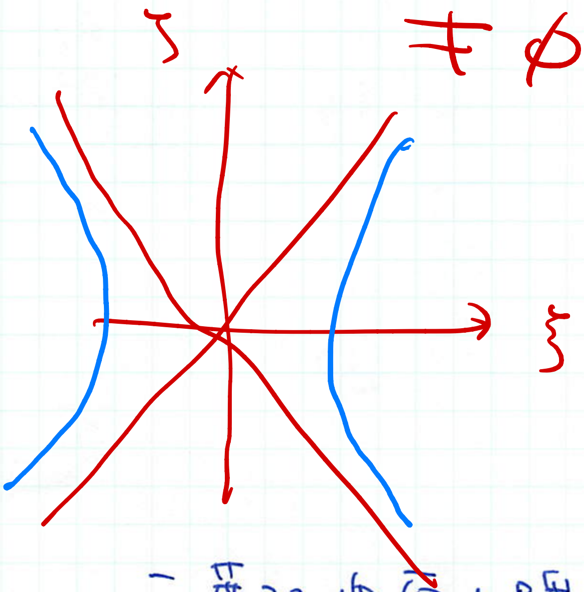
$$\left(\frac{\xi}{\omega_1}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\omega_2}\right)^2=\left(\frac{\zeta}{\omega_3}\right)^2+\omega^2$$



$\forall \zeta_0$

$\zeta=\zeta_0$ の断面は

$\neq \emptyset$



一葉双曲面と呼ぶ。

(問) ξ-ζ 平面, η-ζ 平面による断面は何か考えてみよう.

$\alpha, \beta, \gamma > 0$

$\alpha\beta > 0,\ \gamma < 0$

$\alpha > 0,\ \beta, \gamma < 0$

$\alpha, \beta, \gamma < 0$

Ⅱ rank $A = 2$ のとき. このとき $\det(A) = 0$ となる.

$\exists P \in O(3)$

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0 \text{ とできます.}$$

(~~Ⅱ-i) $\vec{e} \notin \mathrm{Im}(A)$ とします~~. $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ とすると

$$\mathrm{Im}(A) = L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

$$\ker(A) = \mathrm{Im}({}^tA)^{\perp} = \mathrm{Im}(A)^{\perp} = \mathbb{R}\vec{p}_3$$

に注意します.

${}^tA = A$ 　$\mathrm{Im}(A)$

$$\vec{e} = \boxed{(\vec{e}, \vec{p}_1)\vec{p}_1 + (\vec{e}, \vec{p}_2)\vec{p}_2} + \boxed{(\vec{e}, \vec{p}_3)\vec{p}_3}$$

$\in \ker(A)$

と直交分解します. このとき

$$\vec{e} \notin \mathrm{Im}(A) \iff (\vec{e}, \vec{p}_3) \neq 0$$

に注意します. このとき $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ と直交座標変換を考えると

$$(\#) \quad \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + 2\left(\vec{e}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + c = 0$$

$$\iff \alpha X^2 + \beta Y^2 + 2(\vec{e}, \vec{p}_1)X + 2(\vec{e}, \vec{p}_2)Y + 2\underbrace{(\vec{e}, \vec{p}_3)}_{\neq 0}Z + c = 0$$

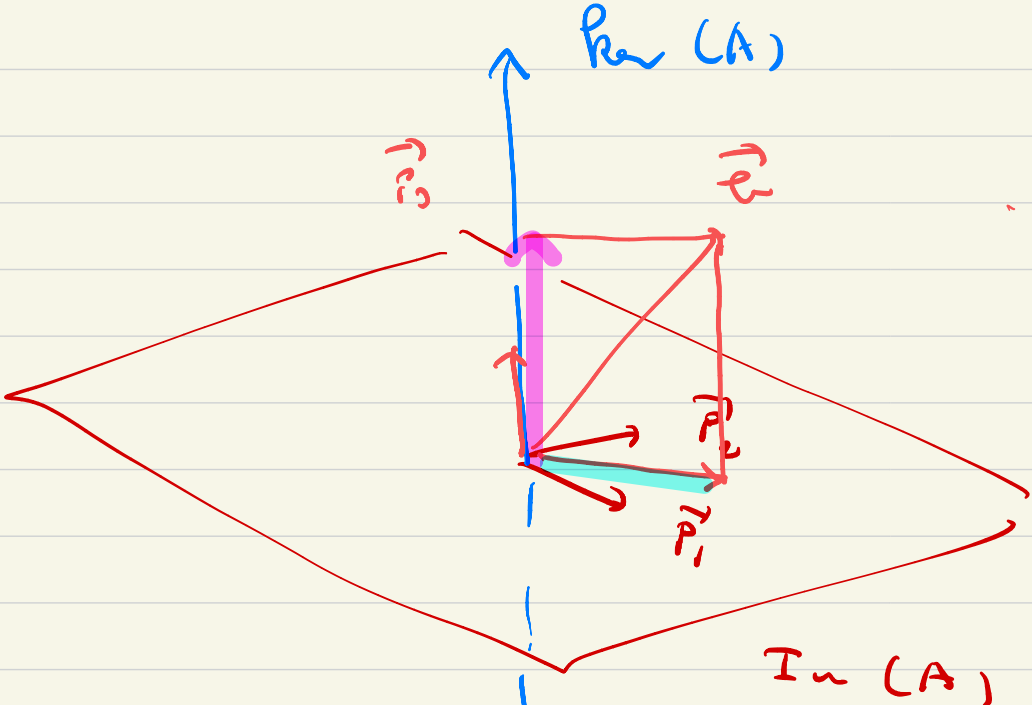
(Ⅱ-i) $\mathrm{Im}(A) \not\ni \vec{e}$

となります. X と Y について平方完成すると

$$\rightarrow \alpha\left(X + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)}{\alpha}\right)^2 + \beta\left(Y + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_2)}{\beta}\right)^2$$

$$+ 2\underbrace{(\vec{e}, \vec{p}_3)}_{= 6}Z + c - \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)^2}{\alpha} - \frac{(\vec{e}, \vec{p}_2)^2}{\beta} = 0$$

となります.



$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A)$$

$\perp$

(Ⅱ-i)

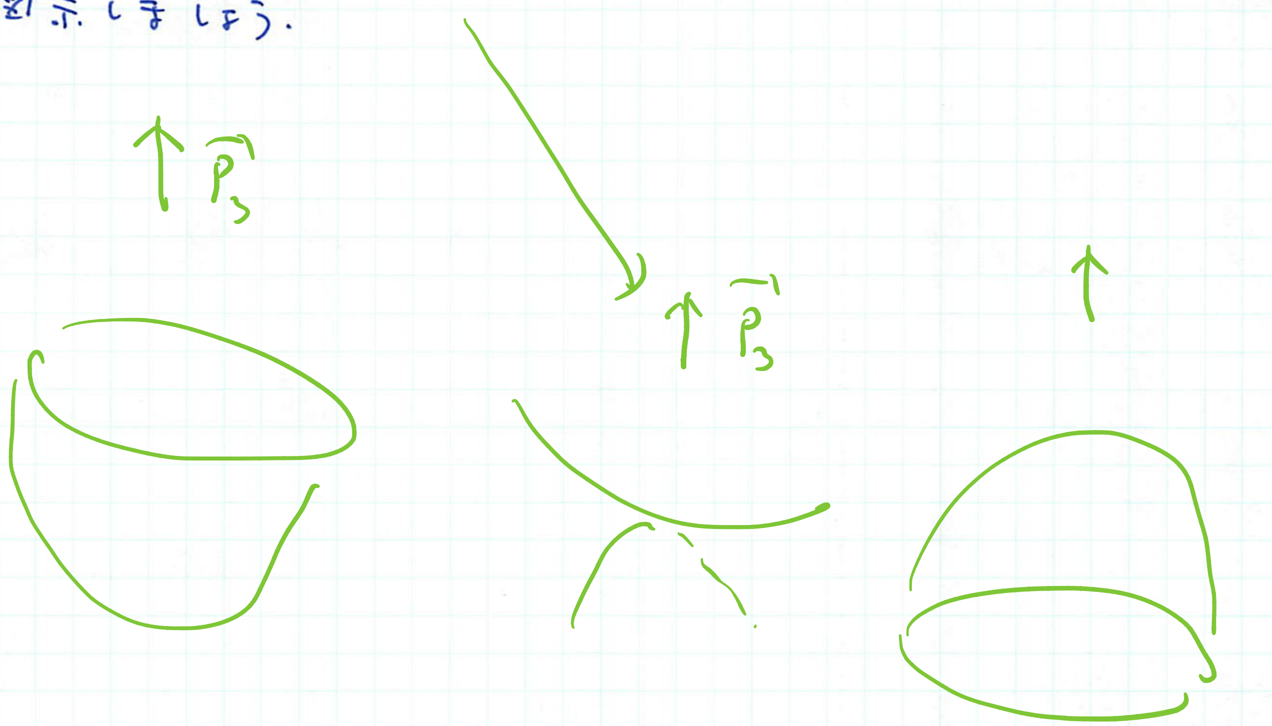
さらに
$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + \dfrac{(\vec{e},\vec{p}_1)}{\alpha} \\ Y + \dfrac{(\vec{e},\vec{p}_2)}{\alpha} \\ Z - c'\end{pmatrix}$$
と平行移動の

座標変換をとると（c'は下で）
$$\alpha' = -\frac{\alpha}{2(\vec{e},\vec{p}_3)}, \quad \beta' = -\frac{\beta}{2(\vec{e},\vec{p}_3)}$$
として
$$c' = -\frac{1}{2(\vec{e},\vec{p}_3)}\left(c - \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)^2}{\alpha} - \frac{(\vec{e},\vec{p}_2)^2}{\beta}\right)$$

$$\zeta = \alpha'\xi^2 + \beta'\eta^2$$
ζ軸 $\vec{p}_3$方向

となります.

問　$\alpha', \beta' > 0$, $\alpha'\beta' < 0$, $\alpha', \beta' < 0$ の場合に分けて図示しましょう.



$\mathrm{Im}(A) \ni \vec{e}$ なら $\exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = -\vec{e}$$

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) + 2\Big(\overbrace{\vec{e} + A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}^{=\vec{0}}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Big) + c = 0$$

$$\downarrow$$

$$\alpha \xi^2 + \beta \eta^2 + c = 0$$

$$\downarrow$$

$$\vdots$$

$\mathrm{Im}(A) \ni \vec{e}$

(II-ii) $\boxed{(\vec{e}, \vec{p}_3) = 0}$ から

$$\alpha\left(x + \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)}{\alpha}\right)^2 + \beta\left(y + \frac{(\vec{e},\vec{p}_2)}{\beta}\right)^2 + \boxed{c - \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)^2}{\alpha} - \frac{(\vec{e},\vec{p}_2)^2}{\beta}} = 0$$

となります。ここでは

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)^2}{\alpha} \\ y + \frac{(\vec{e},\vec{p}_2)^2}{\beta} \\ z \end{pmatrix}, \quad \boxed{c' = -c + \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)^2}{\alpha} + \frac{(\vec{e},\vec{p}_2)^2}{\beta}}$$

とすると

$$\alpha \xi^2 + \beta \eta^2 = \underset{\sim}{c'}$$

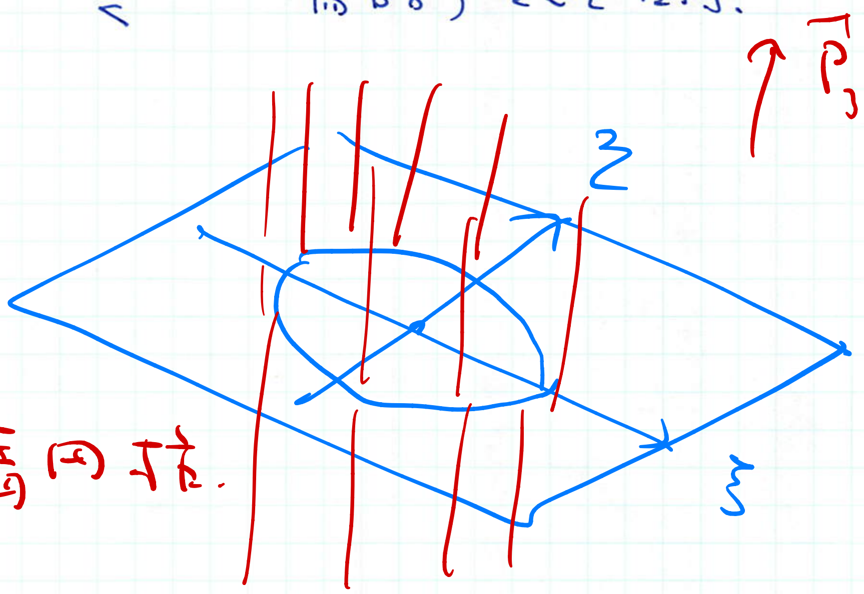
となります。(ζ方向すなわち $\vec{p}_3$ 方向に不変であることに注意)

(問) α, β の符号, $c' \gtreqless 0$ で場合分けして図示しましょう.

2次曲面

例 $\alpha, \beta > 0$

$c' > 0$ 楕円柱.



$\alpha > 0, \beta < 0$

$c' = 0$

↓

2平面.

III rank $A = 1$ のとき.

$\exists P \in O(3)$ に対して

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha \neq 0)$$

とできます. このとき. $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ とすると

$$\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}\vec{p}_1$$

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}({}^tA)^{\perp} = \mathrm{Im}(A)^{\perp} = L(\vec{p}_2, \vec{p}_3)$$

${}^tA = A$

となります.

$$\vec{e} = \underbrace{(\vec{e}, \vec{p}_1)\vec{p}_1}_{\mathrm{Im}(A)} + \underbrace{(\vec{e}, \vec{p}_2)\vec{p}_2 + (\vec{e}, \vec{p}_3)\vec{p}_3}_{\mathrm{Ker}(A)}$$

と直交分解します. このとき.

$$\vec{e} \notin \mathrm{Im}(A) \iff (\vec{e}, \vec{p}_2) \neq 0 \text{ or } (\vec{e}, \vec{p}_3) \neq 0$$

であることに注意します. ここで

$$P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と直交座標変換すると

$$(\#) \iff \alpha X^2 + 2(\vec{e}, \vec{p}_1)X + 2(\vec{e}, \vec{p}_2)Y + 2(\vec{e}, \vec{p}_3)Z + c = 0$$

となります. X について平方完成すると

$$\alpha\left(X + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)}{\alpha}\right)^2 + \overbrace{2(\vec{e}, \vec{p}_2)Y}^{\neq 0 \text{ or}} + \overbrace{2(\vec{e}, \vec{p}_3)Z}^{\neq 0} + c - \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)^2}{\alpha} = 0$$

となります.

(Ⅲ-i) $\vec{e} \notin \mathrm{Im}(A)$ のとき.

$$\vec{g}_2 = (\vec{e},\vec{p}_2)\vec{p}_2 + (\vec{e},\vec{p}_3)\vec{p}_3$$

として ($\vec{g}_2$ は $\vec{e}$ の $\mathrm{Ker}(A)$ への直交射影)

$$\vec{r}_1 = \vec{p}_1$$

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{\|\vec{g}_2\|}\vec{g}_2$$

で或る直交行列 $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$

と定めると直交座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

によって

$$\alpha\left(X' + \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)}{\alpha}\right)^2 + 2dY' + c - \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)^2}{\alpha} = 0$$

となります. $d = \dfrac{(\vec{g}_2, \vec{e})}{\|\vec{g}_2\|^2}$ となるはずです. $d \neq 0$

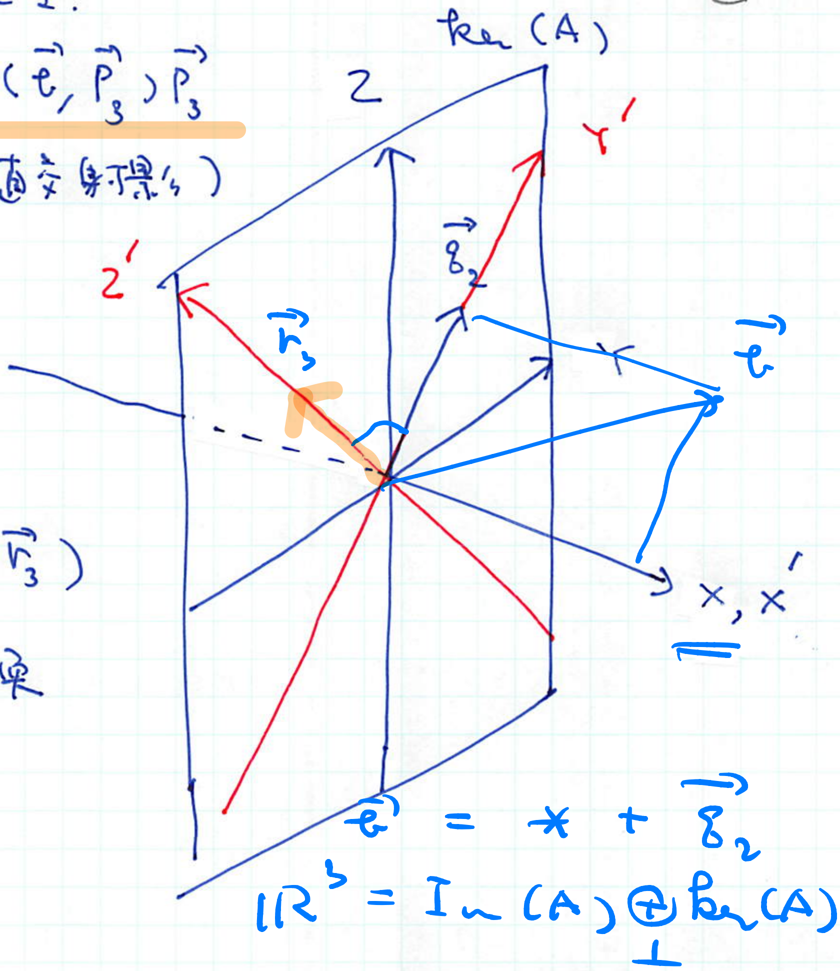
証

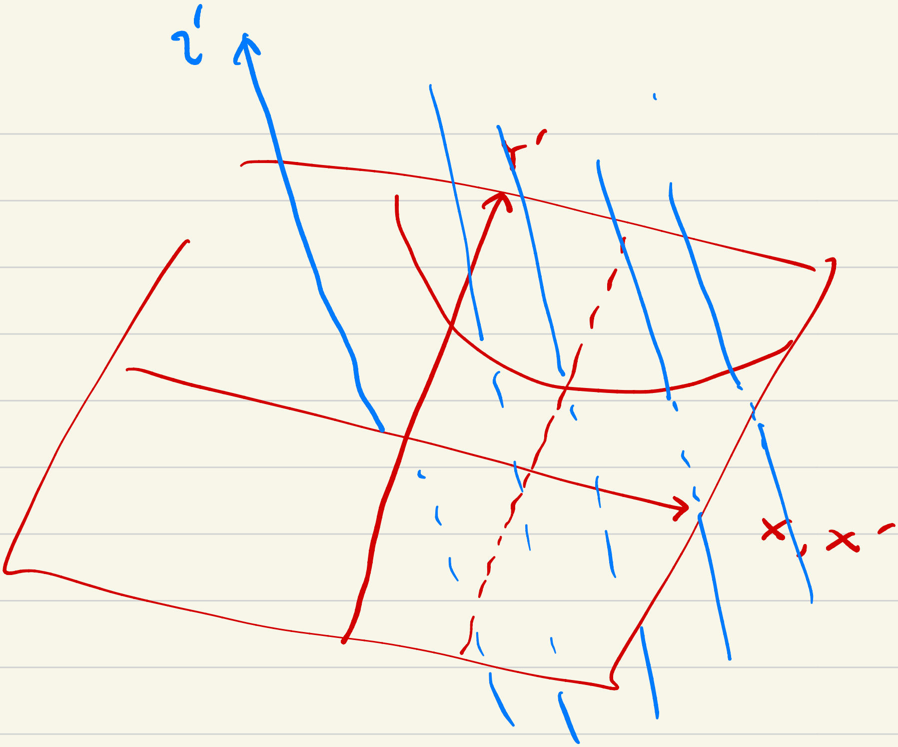
に注意して

$$Y' = -\frac{\alpha}{2d}\left(X' + \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)}{\alpha}\right)^2 - \frac{1}{2d}\left(c - \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)^2}{\alpha}\right)$$

となります. $\vec{r}_3$ 方向 (Z' 方向) に不変な図形となります.

符号は >0, <0





t'
τ'
x, x'

$\mathrm{Im}(A) \ni \vec{b}$ a と [illegible]

$$\exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = -\vec{b} \quad \longleftarrow$$

$$(\#) \Longleftrightarrow \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right) + 2\left(\overbrace{\vec{b} + A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}^{=0}, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right) + c = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha \xi^2 + c = 0$$

(Ⅲ-ⅱ) $\vec{e} \in \mathrm{Im}(A)$ のとき.

(#) ⇔ $\alpha X^2 + 2(\vec{e},\vec{p}_1)X + c = 0$

となります. Xについて平方完成すると

$$\alpha\left(X + \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)}{\alpha}\right)^2 = -c + \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)^2}{\alpha}$$

となります. ($\vec{p}_2, \vec{p}_3$ 方向に不変となります).

問 $-c + \dfrac{(\vec{e},\vec{p}_1)^2}{\alpha} \gtreqless 0$ で場合分けをして

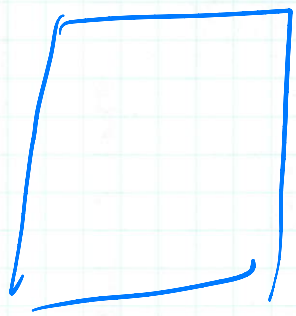
どのような図形になるか考えましょう.

$\alpha > 0$

< 0

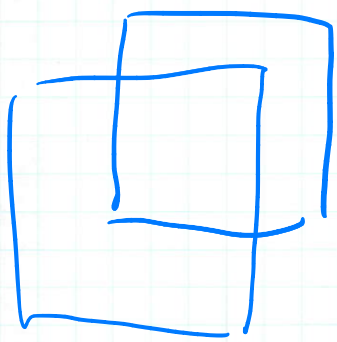
0点 空 → 空

1点 →



平面

2点



平行2平面.

$$\left(X + \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)}{\alpha}\right)^2 = \boxed{-\frac{1}{\alpha}\left(c - \frac{(\vec{e},\vec{p}_1)^2}{\alpha}\right)}$$

$\square$

> 0

$= 0$

$<$