広義固有空間 (その1)

$A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq \beta$ とします

(1) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{m_1} (\lambda - \beta)^{m_2}$ $(m_1, m_2 \geq 1,\ m_1 + m_2 = \overset{n}{1})$

と仮定します。このときAの最小多項式は

→(2) $\mu_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{k_1} (\lambda - \beta)^{k_2}$ $(1 \leq k_1 \leq m_1,\ 1 \leq k_2 \leq m_2)$

が成立します。ここで固有値 α, β の一般固有空間を

$$W(\alpha) = \mathrm{Ker}\left((A - \alpha I_n)^{m_1}\right)$$

$$W(\beta) = \mathrm{Ker}\left((A - \beta I_n)^{m_2}\right)$$

と定義します。

$I = ((\lambda-\alpha)^{m_1}, (\lambda-\beta)^{m_2})$
$= (1)$

→ **定理1** $\mathbb{K}^n = W(\alpha) \oplus W(\beta)$ ← P_1, P_2 が射影行列

$\vec{v} \longmapsto P_1 \vec{v} + P_2 \vec{v}$

(証明) $(\lambda - \alpha)^{m_1}$, $(\lambda - \beta)^{m_2}$ の最大公約式が1なので

$\exists d_1(\lambda), \exists d_2(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ に対して

(2) $d_1(\lambda)(\lambda - \beta)^{m_2} + d_2(\lambda)(\lambda - \alpha)^{m_1} = 1$

$$\boxed{\begin{matrix} f(A)g(A) \\ \shortparallel \\ g(A)f(A) \end{matrix}}$$

が成立します。ここで n 次正方行列

(3) $P_1 := d_1(A)(A - \beta I_n)^{m_2}$, $P_2 := d_2(A)(A - \alpha I_n)^{m_1}$

と定めます。このとき C−H から

(4) $P_1 P_2 = O_n$ $= d_1(A) d_2(A) \underbrace{(A - \beta I_n)^{m_2} (A - \alpha I_n)^{m_1}}_{\shortparallel \atop O_n}$

$P_2 P_1$

が分かります。(2)から

(5) $$P_1 + P_2 = I_n$$

$$P_1^2 + \underbrace{P_1 P_2}_{O_n} = P_1$$

となりますが，この両辺に P_1, P_2 を左からかけると

(6) $$P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2$$

$$\underbrace{P_2 P_1}_{O_n} + P_2^2 = P_2$$

が従います．これから

$$\boxed{(7) \quad \mathbb{K}^n = \mathrm{Im}\, P_1 \oplus \mathrm{Im}\,(P_2)}$$

であることが分かります．(5) から $\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$\vec{v} = P_1 \vec{v} + P_2 \vec{v}$$

$$I_n = P_1 + P_2$$

$$\vec{v} = (P_1 + P_2)\vec{v}$$

が成立するので

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Im}\, P_1 + \mathrm{Im}\, P_2$$

となる．この「+」が「$\oplus$」であることを示す．$\vec{w}_1 \in \mathrm{Im}\, P_1$, $\vec{w}_2 \in \mathrm{Im}\, P_2$ が

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0} \longrightarrow \vec{w}_1 = \vec{w}_2 = \vec{0}$$

を満たすとする．$\vec{w}_j = P_j \vec{v}_j$ $(j = 1, 2)$ と表すと

$$P_1 \vec{v}_1 + P_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$P_1^2 \vec{v}_1 + \underbrace{P_1 P_2}_{O_n} \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{0} = P_1^2 \vec{v}_1 = P_1 \vec{v}_1$$

となる．P_1, P_2 を左からかけると

$$P_1 \vec{v}_1 = \vec{0}, \quad P_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

となるので $\vec{w}_1 = \vec{w}_2 = \vec{0}$ となります． $\boxed{\text{(7) が示せた}}$

次に

$$\boxed{(8)\quad \mathrm{Im}\,P_1 = W(\alpha),\quad \mathrm{Im}\,P_2 = W(\beta)}$$

を示します. $\vec{w}_1 \in \mathrm{Im}\,P_1$ とすると

$$\vec{w}_1 = d_1(A)\underbrace{(A-\beta I_n)}\,^{m_2}\,\boxed{\vec{v}_1}$$

と書けます. 両辺に $(A-\alpha I_n)^{m_1}$ をかけると

$$(A-\alpha I_n)^{m_1}\vec{w}_1 = d_1(A)\underbrace{(A-\alpha I_n)^{m_1}(A-\beta I_n)^{m_2}}_{O_n}\vec{v}_1$$

$$\underset{\mathrm{CH}}{\underset{\uparrow}{=}}\ d_1(A)\,O_n\vec{v}_1 = \vec{0}$$

となります. 従って $\longrightarrow$ $\vec{w}_1 \in \boxed{\overset{W(\alpha)}{\overset{\parallel}{\mathrm{Ker}\left((A-\alpha I_n)^{m_1}\right)}}}$

$$\boxed{(9)\quad \mathrm{Im}\,P_1 \subset W(\alpha),\quad \mathrm{Im}\,P_2 \subset W(\beta)}$$ 各自に示す.

であることが分かります. 逆の包含関係は次のように示せる. $\vec{v}_1 \in W(\alpha)$ とする. $P_2 = d_2(A)(A-\alpha I_n)^{m_1}$ なので

$\boxed{P_2\vec{v}_1 = \vec{0}}$ となる.

$I_n = P_1 + P_2$

$$\vec{v}_1 = P_1\vec{v}_1 + \underbrace{P_2\vec{v}_1}_{=\vec{0}} = P_1\vec{v}_1 \in \mathrm{Im}(P_1)$$

から $\vec{v}_1 \in \mathrm{Im}(P_1)$ となる. 従って

$$(10)\qquad W(\alpha) \subset \mathrm{Im}(P_1),\ \boxed{W(\beta) \subset \mathrm{Im}(P_2)}$$

↑ 各自.

も分かります.

さらに

$$W_0(\alpha) := \mathrm{Ker}\left((A-\alpha I_n)^{k_1}\right)$$
$$W_0(\beta) := \mathrm{Ker}\left((A-\beta I_n)^{k_2}\right)$$

とする. このとき

定理 2 $W_0(\alpha) \overset{\subset}{=} W(\alpha)$, $W_0(\beta) \overset{\subset}{=} W(\beta)$

☆ $(A-\alpha I_n)^{k_1}\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow (A-\alpha I_n)^{m_1}\vec{v}=\vec{0}$

$k_1 \leq m_1$

$W_0(\alpha) \subset W(\alpha)$, $W_0(\beta) \subset W(\beta)$

は簡単に示せる. さらに $\exists \tilde{d}_1(\lambda)$, $\exists \tilde{d}_2(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$

$$\tilde{d}_1(\lambda)(\lambda-\beta)^{k_2} + \tilde{d}_2(\lambda)(\lambda-\alpha)^{k_1} = \boxed{1}$$

から $\tilde{P}_1 := \tilde{d}_1(A)(A-\beta I_n)^{k_2}$, $\tilde{P}_2 := \tilde{d}_2(A)(A-\alpha I_n)^{k_1}$

に対して

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Im}\,\tilde{P}_1 \oplus \mathrm{Im}\,\tilde{P}_2$$

$\tilde{P}_1\tilde{P}_2 = O_n \longleftarrow (A-\alpha I_n)^{k_1}(A-\beta I_n)^{k_2} = O_n$

さらに

$$\mathrm{Im}\,\tilde{P}_1 = W_0(\alpha), \quad \mathrm{Im}\,\tilde{P}_2 = W_0(\beta)$$

から

$$\mathbb{K}^n = W_0(\alpha) \oplus W_0(\beta)$$

となります

$$\mathbb{K}^n \overset{\downarrow}{=} W_0(\alpha) \oplus W_0(\beta) \underset{*}{\overset{=\,\downarrow}{\subseteq}} W(\alpha) \oplus W(\beta) \overset{\downarrow}{=} \mathbb{K}^n$$

から ⊛ が = となり

$$W_0(\alpha) = W(\alpha), \quad W_0(\beta) = W(\beta)$$

が従います.

(定理2 QED)

$V_1, V_2, W_1, W_2 \subset \mathbb{K}^n$ すべて部分空間.

$$V_1 \subset W_1 \longrightarrow \dim V_1 \leq \dim W_1$$

$$V_2 \subset W_2 \longrightarrow \dim V_2 \leq \dim W_2$$

$$V_1 \oplus V_2 = W_1 \oplus W_2 \longrightarrow \dim V_1 + \dim W_2 = \dim W_1 + \dim W_2$$

$$\Longrightarrow V_1 = W_1, \quad V_2 = W_2$$

$$\dim V_1 = \dim W_1$$

$$\dim W_2 = \dim W_2$$

(3a2) $\alpha \neq \beta.$ $A \in M_n(\mathbb{K})$

→ $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^{m_1}(\lambda-\beta)^{m_2}$ $m_1 + m_2 = n.$

$\mu_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^{k_1}(\lambda-\beta)^{k_2}$

$1 \leq k_1 \leq m_1$

$1 \leq k_2 \leq m_2.$

$$\rightarrow \quad \mathbb{K}^n = \underset{\ker((A-\alpha I_n)^{m_1})}{\underset{\shortparallel}{W(\alpha)}} \oplus \underset{\ker((A-\beta I_n)^{m_2})}{\underset{\shortparallel}{W(\beta)}}$$

$W(\alpha) \oplus W(\beta) = \mathbb{K}^n \rightsquigarrow$ $m_1' + m_2' = n$

$W(\alpha), W(\beta)$の基底を $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{m_1'}$; $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_{m_2'}$ とすると
次元 m_1', m_2'

$W(\alpha), W(\beta)$は $A\vec{p}_j \in W(\alpha)$, $A\vec{q}_j \in W(\beta)$ $= \# \vec{q}_1 + \cdots + \# \vec{q}_{m_2'}$

$= * \vec{p}_1 + \cdots + * \vec{p}_{m_1'}$

となります。これから。 $\boxed{P = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_{m_1'} ; \vec{q}_1 \cdots \vec{q}_{m_2'})}$ とすると

A不変

$\left(\begin{array}{l} \vec{v} \in W(\alpha) \\ \Rightarrow A\vec{v} \in W(\alpha) \end{array} \right)$

正則

$$P^{-1} A P = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & A_2 \end{array} \right)$$

$\in M_{m_1'}(\mathbb{K})$

$\in M_{m_2'}(\mathbb{K})$

となります。これから

$$\boxed{\Phi_{A_1}(\lambda) \, \Phi_{A_2}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)}$$

となります。

$$(A - \alpha I_n)^{m_1} \underset{\underset{W(\alpha)}{\cup}}{\vec{p}_j} = \vec{0}$$

$(A - \alpha I_n)^{m_1} (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_{m_1'} ; \cdots)$

$= (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_{m_1'} ; \quad)$

$$\begin{array}{c|cc} & m_1' & m_2' \\ \hline m_1' & O_{m_1'} & O \\ m_1' & O & * \end{array}$$

から

$$(A_1 - \alpha I_{m_1'})^{m_1} = O_{m_1'}$$

が従います。

$$I_{A_1} \ni (\lambda - \alpha)^{m_1}$$

$= \{ f(\lambda) ; f(A_1) = O \}$

から

$$\mu_{A_1}(\lambda) \mid (\lambda - \alpha)^{m_1}$$

から

$$\mu_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{k_1'}$$

$1 \leq k_1' \leq m_1$

同様に

$$\mu_{A_2}(\lambda) = (\lambda - \beta)^{k_2'}$$

$\mu_{A_1}(\lambda) \mid \Phi_{A_1}(\lambda)$

と書ける。これから

$$\Phi_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{m_1'}, \quad \Phi_{A_2}(\lambda) = (\lambda - \beta)^{m_2'}$$

となります。これから $m_1 = m_1'$, $m_2 = m_2'$ であることが分かります。

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & A_2 \end{array}\right)$$

A_1, A_2 の Jordan 標準形

$$\begin{cases} \Phi_B(\lambda) = (\lambda-\alpha)^n \\ \mu_B(\lambda) = (\lambda-\alpha)^k \end{cases}$$

課題

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^{m_1}(\lambda-\beta)^{m_2}(\lambda-\gamma)^{m_3}$$

$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha.$

の場合はどうするか?

以上で次の定理3を示しました.

定理3 $\dim W(\alpha) = m_1, \dim W(\beta) = m_2$

また

$$\Phi_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{m_1}, \quad \Phi_{A_2}(\lambda) = (\lambda - \beta)^{m_2}$$

も示せました. さらに

$$\mu_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{k_1}, \quad \mu_{A_2}(\lambda) = (\lambda - \beta)^{k_2}$$

も成立します. 実際.

$$(A - \alpha I_n)^{k_1} \vec{p}_j = \vec{0} \qquad (j = 1, \cdots, m_1)$$

から

$$(A_1 - \alpha I_{m_1})^{k_1} = O_{m_1}$$

同様に

$$(A_2 - \beta I_{m_2})^{k_2} = O_{m_2}$$

も成立します. もし $1 \leq k < k_1$ である k に対して

$$(A_1 - \alpha I_{m_1})^{k} = O_{m_1}$$

とすると $\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$(A - \alpha I_n)^{k} (A - \beta I_n)^{k_2} = O_n$$

となりますから 最小多項式の定義に反します.