C-H の定理

Nobuyuki TOSE

January 10, 2020

$A \in M_2(\mathbb{K})$ or $A \in M_3(\mathbb{K})$ に対して

$$\Phi_A(A) = O_{2 \text{ or } 3}$$

であることを示した（C-H の定理）.

（三角化を用いる）

$A \in M_3(\mathbb{K})$ に対する証明はそのままでは一般のサイズの正方行列に対しては適用しづらい.

→ 帰納法で示す.

（他にいろいろな証明がある）

17 (2020/12/21)

$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbf{K}^n)^*$, $A_0, B_0 \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbf{a} \\ \hline \vec{0} & A_0 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} \beta & \mathbf{b} \\ \hline 0 & B_0 \end{array}\right)$$

と定めます．このとき $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ に対して

$$f(A) = \left(\begin{array}{c|c} f(\alpha) & * \\ \hline \vec{0} & f(A_0) \end{array}\right)$$

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\beta & * \\ \hline \vec{0} & A_0B_0 \end{array}\right)$$

$= \alpha \mathbf{b} + \mathbf{a} B_0$

$$A^k = \left(\begin{array}{c|c} \alpha^k & * \\ \hline \vec{0} & A_0^k \end{array}\right)$$

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\begin{array}{c|c} \alpha^k & * \\ \hline \vec{0} & A_0^k \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \sum_{k=0}^{m} a_k \alpha^k & * \\ \hline \vec{0} & \sum_{k=0}^{m} a_k A_0^k \end{array}\right)$$

CH の定理 (1)

CH の定理

$A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\Phi_A(A) = O_n$$

証明

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_n), \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{K}$$

として証明します（$\mathbf{K} = \mathbf{C}$ のとき必ず成立します）．このときある $\vec{p}_1 \in \mathbf{K}^n$ が存在して

$$A\vec{p}_1 = \alpha_1 \vec{p}_1, \quad \vec{p}_1 \neq \vec{0}$$

さらに基底の延長を用いて正則行列 $P = (\vec{p}_1 \ \cdots \ \vec{p}_n)$ を構成すると

$$B := P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{b} \\ \hline \vec{0} & B_0 \end{array}\right)$$

$$AP = (\alpha_1 \vec{p}_1 \ \ * \cdots *) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n)\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{b} \\ \hline 0 & \\ \vdots & B_0 \\ 0 & \end{array}\right)$$

CH の定理 (2)

このとき

$\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda)$

$$\Phi_B(\lambda) = \Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\boxed{\cdots(\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_n)}$$

R

$$\Phi_B(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\boxed{\Phi_{B_0}(\lambda)}$$

から

$$\Phi_{B_0}(\lambda) = (\lambda - \alpha_2)\cdots(\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_n)$$

となります．ここで n に関する帰納法を用いると R

$$\Phi_{B_0}(B_0) = O_{n-1}$$

と仮定できます．

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & B_0 \end{pmatrix}$$

A_0, A_1 正方行列.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & * \\ \hline O & A_1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \Phi_A(\lambda) = \Phi_{A_0}(\lambda)\,\Phi_{A_1}(\lambda)$$

$$\Phi_B(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\Phi_{B_0}(\lambda)$$

から

$$\Phi_B(B) = (B - \alpha_1 I_n)\Phi_{B_0}(B)$$

$B = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline \vec{0} & B_0 \end{array}\right)$

となります．他方「確認問題」から

$$\Phi_{B_0}(B) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi_{B_0}(\alpha_1) & * \\ \hline \vec{0} & \Phi_{B_0}(B_0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi_{B_0}(\alpha_1) & * \\ \hline \vec{0} & O_{n-1} \end{array}\right)$$

となりますから

$$\Phi_B(B) = \left(\begin{array}{c|c} o & * \\ \hline \vec{0} & B_0 - \alpha_1 I_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \Phi_{B_0}(\alpha_1) & * \\ \hline \vec{0} & O_{n-1} \end{array}\right) = O_n$$

となります．

CH の定理 (4)

$\Phi_B = \Phi_A$, $B = P^{-1}AP$

さらに

$$O_n = \Phi_B(B) = \Phi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\Phi_A(A)P$$

から

$P\cdot$, $\cdot P^{-1}$

$$\Phi_A(A) = O_n \tag{1}$$

となります.

$$\boxed{f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P.}$$

各項.