n 次実対称行列の対角化

Nobuyuki TOSE

January 05, 2020

A : 3次正方行列, 対称 ${}^tA = A$. $\Rightarrow$ $\exists P \in O(3)$

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \Phi_A(\alpha_j) = 0 \\ \Rightarrow \\ \alpha_j \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

$\Phi_A(\alpha) \neq 0 \Rightarrow V(\alpha) = \{\vec{0}\}$

定理 1

n 次の実対称行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ に対して $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ が相異なる場合：$\alpha \neq \beta$

$$V(\alpha) \perp V(\beta)$$

が成立します．

$A\vec{q} = \beta\vec{q}$

$\vec{p} \in V(\alpha)$, $\vec{q} \in V(\beta)$ とします．

$A\vec{p} = \alpha\vec{p}$

$$(A\vec{p}, \vec{q}) = (\alpha\vec{p}, \vec{q}) = \alpha(\vec{p}, \vec{q})$$

$$=$$

$$(A\vec{p}, \vec{q}) = (\vec{p}, {}^tA\vec{q}) = (\vec{p}, A\vec{q}) = (\vec{p}, \beta\vec{q}) = \beta(\vec{p}, \vec{q})$$

${}^tA = A$

から

$$\underbrace{(\alpha - \beta)}_{\neq 0}(\vec{p}, \vec{q}) = 0$$

$\to (\vec{p}, \vec{q}) = 0.$

が従います．

定理 2

3 次の実対称行列 A に対して以下が成立します.

(1) エルミート内積の　ところ　$\Phi_A(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\cdots(\lambda - \alpha_n) \ \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$$

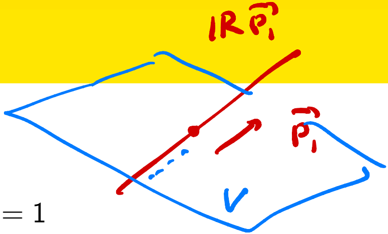
(2) 直交行列 $P \in O(n)$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成立します.

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

定理 2 の証明 (1)



$\mathbb{R}$

(2) を証明します．α_1 に対して

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \ \|\vec{p}_1\| = 1$$

を満たす $\vec{p}_1 \in \mathbf{R}^3$ が存在します．このとき以下が成立します．

$V := (\mathbf{R}\vec{p}_1)^{\perp}$ は A 不変である．すなわち

$$\vec{v} \in V \Rightarrow A\vec{v} \in V$$

実際 $(\vec{p}_1, \vec{v}) = 0$ とすると

$\vec{v} \in (\mathbb{R}\vec{p}_1)^{\perp}$

$$(\vec{p}_1, A\vec{v}) = ({}^tA\vec{p}_1, \vec{v}) = (A\vec{p}_1, \vec{v}) = \alpha_1(\vec{p}_1, \vec{v}) = 0$$

から分かります．

$\to A\vec{v} \in (\mathbb{R}\vec{p}_1)^{\perp}$

${}^tA = A$.

$$\boxed{V:\ A\text{不变}\quad (\vec{v}\in V \Rightarrow A\vec{v}\in V)}$$

$$\Downarrow$$

$V^{\perp}$: A 不变.

$\vec{w}\in V^{\perp}$ $\quad\forall\vec{v}\in V$

$$(A\vec{w},\vec{v}) = (\vec{w}, {}^{t}A\vec{v}) = (\vec{w}, \underset{\in V}{A\vec{v}}) = 0$$

$$\longrightarrow (A\vec{w})\in V^{\perp}$$

$\vec{p}_1, \vec{q}_2, \cdots, \vec{q}_n$ $\mathbb{R}^n$ の基底.

正規直交基底の延長を用いて $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底

G.S.

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$$

が構成できます．$\vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ が V の正規直交基底であることに注意しましょう．

直交行列 $P = (\vec{p}_1 \ \cdots \ \vec{p}_n) \in O(n)$ を定義します．このとき $2 \leq j \leq n$ のとき $\vec{p}_j \in V$ から $A\vec{p}_j \in V$ が分かります．従って

$$V \ni A\vec{p}_j = *\vec{p}_2 + \cdots + *\vec{p}_n$$

から

$\alpha \vec{p}_1 = 0\vec{p}_1 + *_2\vec{p}_2 + \cdots + *_n\vec{p}_n$

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ \cdots \ A\vec{p}_n) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \cdots \ \vec{p}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ *_2 \\ \vdots \\ *_n \end{pmatrix}$

$n-1$ 次正方

となります

定理 2 の証明 (3)

$P \in O(n) \rightsquigarrow {}^tP = P^{-1}$

${}^tPP = P\,{}^tP = I_n$

$|P| = \pm 1$

$$ {}^tPAP = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{} $$

$AP = P\underbrace{\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}}_{}$

対称

の左辺は

$$ {}^t({}^tPAP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^t({}^tP) = {}^tPAP $$

${}^t({}^tP) = P$

から対称であることが分かります．右辺が対称であることと右辺の転置が

$$ \boxed{\begin{array}{l} {}^t(AB) \\ = {}^tB\,{}^tA \end{array}} $$

$$ {}^t\begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{{}^tB} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & \boxed{B} \end{pmatrix} $$

となることから

$$ \underbrace{{}^tB = B}_{} $$

であることが分かります．

定理 2 の証明 (4)

nの帰納法

B が対称であることから $Q_0 \in O(n-1)$ が存在して

$$ {}^tQ_0BQ_0 = \boxed{\begin{pmatrix} \beta_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}} $$

${}^tPAP.$

となります． $Q := \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q_0 \end{pmatrix} \in O(n)$ で

合同.

$$ \underset{\substack{\| \\ {}^t(PQ)}}{} \boxed{{}^tQ{}^tP}APQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & {}^tQ_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & {}^tQ_0BQ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix} $$

から $R = PQ \in O(n)$ で ${}^tR = {}^tQ{}^tP$ なので

$P_1, P_2 \in O(n)$

$\Rightarrow P_1 \cdot P_2 \in O(n)$

$P_1^{-1} \in O(n)$

$$ {}^tRAR = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & \boxed{{}^tQ_0BQ_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix} $$

$$Q_1 \in O(m_1), \quad Q_2 \in O(m_2)$$

$$\boxed{Q = \left(\begin{array}{c|c} Q_1 & \\ \hline & Q_2 \end{array}\right) \in O(m_1 + m_2)}$$