GS の直交化と直交補空間

Nobuyuki TOSE

December 12, 2019

直交射影

dim $V = \ell$.

V を $\mathbf{R}^n$ の部分空間とする．$V \neq \{\vec{0}\}$ として，V の正規直交基底を

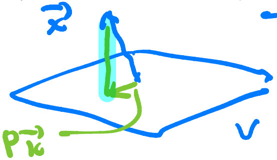
$$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$$

1) $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$ V の基底

2) $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$ は 正規直交系

$$(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

が与えられているとする．このとき $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して



①
$$P\vec{x} := \sum_{j=1}^{\ell} (\vec{x}, \vec{p}_j)\vec{p}_j \in V$$

$(\vec{x}, \vec{p}_k)\vec{p}_k$

とする．このとき $1 \leq k \leq \ell$ に対して

$$\begin{aligned}(\vec{x} - P\vec{x}, \vec{p}_k) &= (\vec{x} - (\vec{x}, \vec{p}_1)\vec{p}_1 - \cdots - (\vec{x}, \vec{p}_\ell)\vec{p}_\ell, \vec{p}_k) \\ &= (\vec{x}, \vec{p}_k) - (\vec{x}, \vec{p}_k) = 0\end{aligned}$$

②

から $\vec{x} - P\vec{x} \perp V$

$\vec{x}$ の V への直交射影

$$\vec{x} - P\vec{x} \perp V \iff \underbrace{\forall \vec{v} \in V}\quad \vec{x} - P\vec{x}_{k} \perp \vec{v}$$

$\vec{p}_j \in V$

定義

$$\Updownarrow$$

$$\vec{x} - P\vec{x} \perp \vec{p}_j \quad (j = 1, \cdots, l)$$

$\forall \vec{v} \in V$

$$\vec{v} = c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_l\vec{p}_l$$

このとき

$$(\vec{x} - P\vec{x}, \vec{p}_j) = (\vec{x} - P\vec{x}, c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_l\vec{p}_l)$$

$$= \sum_{j=1}^{l} c\underbrace{(\vec{x} - P\vec{x}, \vec{p}_j)}_{0} = 0.$$

合 田.

$\vec{a} \perp V, \ \vec{b} \perp V$
$\Rightarrow \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \perp V$

「V の別の正規直交基底を用いても $P\vec{x}$ は変わらない.」
実際 $\vec{x}_*, \vec{x}_\# \in V$ に対して

$$\vec{x} - \vec{x}_* \perp V, \ \vec{x} - \vec{x}_\# \perp V \Rightarrow \vec{x}_* = \vec{x}_\#$$

これは

$$\vec{x}_* - \vec{x}_\# = \{\vec{x} - \vec{x}_\#\} - \{\vec{x} - \vec{x}_*\} \perp V$$

となるが $\vec{x}_* - \vec{x}_\# \in V$ でもあるので

$$\|\vec{x}_* - \vec{x}_\#\|^2 = (\underbrace{\vec{x}_* - \vec{x}_\#}_{V^\perp}, \underbrace{\vec{x}_* - \vec{x}_\#}_{V}) = 0$$

から $\vec{x}_* = \vec{x}_\#$ が従う.
「$P\vec{x}$ を $\vec{x}$ の V への直交射影と呼びます.」

V : 部分空間

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

$\Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V$

GS の直交化 (1)

$\dim V = \ell$

$\mathbf{R}^n$ の部分空間 V に対して基底 $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell \in V$ があるとします．そして V の部分空間

$V_1 = \mathbb{R}\vec{q}_1 \subset \subset \cdots \subset V_\ell = V$

$$V_j = L(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_j) \subset V$$

を定めます．V_j に正規直交基底 $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_j$ が与えられているとします．このとき

$$\vec{r}_{j+1} := \vec{q}_{j+1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{j} (\vec{q}_{j+1}, \vec{p}_k)\vec{p}_k}_{= P_{V_j}\vec{q}_{j+1} \in V_j} \in L(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_j, \vec{q}_{j+1}) = V_{j+1} \subset V$$

は　$\neq \vec{0}$　$= \vec{0}$ とすると

$$\vec{r}_{j+1} \perp V_j$$

となります．さらに $\vec{r}_{j+1} \neq \vec{0}$ となります．もし $\vec{r}_{j+1} = \vec{0}$ ならば

$$\vec{q}_{j+1} = \sum_{k=1}^{j} (\vec{q}_{j+1}, \vec{p}_k)\vec{p}_k = *_1\vec{q}_1 + \ldots + *_j\vec{q}_j$$

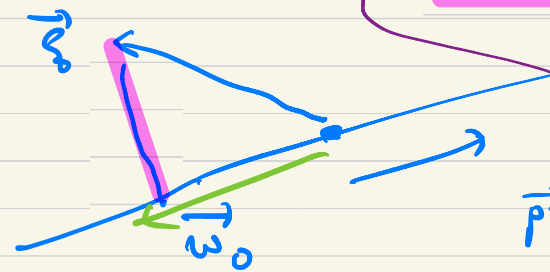
となり $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_j, \vec{q}_{j+1}$ が線型独立であることに反します．

$\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{p} \neq \vec{0}$ $\vec{q}$ の $\vec{p}$ 方向射影を $\vec{w}_0$

$$\boxed{\vec{w}_0 = \frac{(\vec{p},\vec{q})}{\|\vec{p}\|^2}\vec{p}}$$

$\vec{w}_0 = t\vec{p}$

$$(\vec{q}-t\vec{p}, \vec{p}) = 0$$

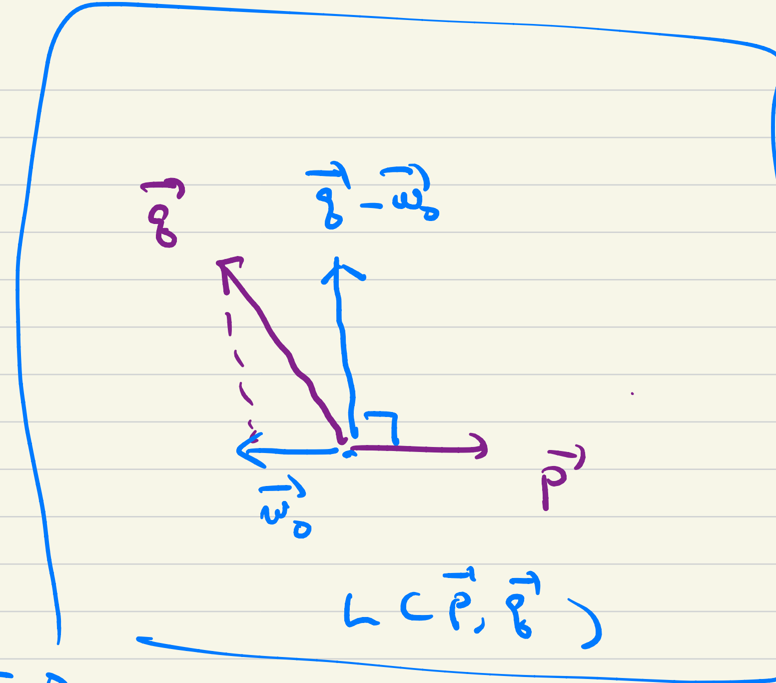


$$= (\vec{q},\vec{p}) - t\underbrace{\|\vec{p}\|^2}_{\neq 0}$$

$$\vec{p} \nparallel \vec{q} \rightsquigarrow \vec{p} \neq \vec{0}$$

$$\vec{r_1} = \frac{1}{\|\vec{p}\|}\vec{p}$$

$$\vec{r_2} = \frac{1}{\|\vec{q} - \vec{w_0}\|}(\vec{q} - \vec{w_0})$$



$$\longrightarrow \begin{cases} (\vec{r_1}, \vec{r_2}) = 0 \\ \|\vec{r_1}\| = \|\vec{r_2}\| = 1. \end{cases}$$

$L(\vec{p}, \vec{q})$ の 正規直交基底.

$\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ LI $\longrightarrow$ $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ $\quad \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in L(\vec{p},\vec{q})$

$L(\vec{p},\vec{q})$ の正規直交基底

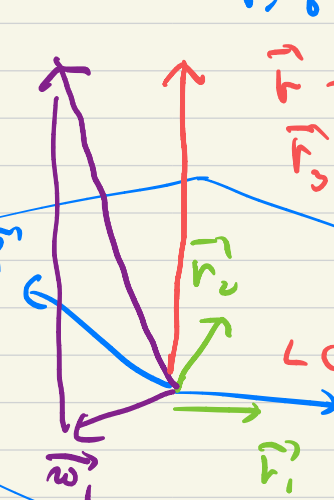
$= \vec{0}$ となること

$\vec{r} = (\vec{r},\vec{r}_1)\vec{r}_1 + (\vec{r},\vec{r}_2)\vec{r}_2$

$\in L(\vec{p},\vec{q})$

$\vec{r} = * \vec{p} + \# \vec{q}$

※



$\vec{r} - \vec{\omega}_1$

$\vec{r}_3 = \dfrac{1}{\|\vec{r}-\vec{\omega}_1\|}(\vec{r}-\vec{\omega}_1)$

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ は $L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$ の正規直交基底.

$V_2 = L(\vec{p},\vec{q})$

$\vec{\omega}_1 = (\vec{r},\vec{r}_1)\vec{r}_1 + (\vec{r},\vec{r}_2)\vec{r}_2$

$= P_{V_2}\vec{r}$

$\longrightarrow \vec{r} - \vec{\omega}_1 \perp L(\vec{p},\vec{q})$

$\neq \vec{0}$

GS の直交化 (2)

ここで

$$\vec{p}_{j+1} := \frac{1}{\|\vec{r}_{j+1}\|}\vec{r}_{j+1} \rightarrow \|\vec{p}_{j+1}\| = 1$$

と定めると

$\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_j, \vec{p}_{j+1}$ は V_{j+1} の正規直交基底となります

$$\underbrace{(\vec{p}_1, \vec{p}_{j+1}) = \cdots = (\vec{p}_j, \vec{p}_{j+1}) = 0}$$

$$\vec{r}_{j+1} \perp V_j$$

$$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_j$$

正規直交基底の存在と延長

定理 1

$\mathbf{R}^n$ の部分空間 $V(\neq \{\vec{0}\})$ に対して正規直交基底が存在します.

定理 2

$V \subset W$ を満たす $\mathbf{R}^n$ の部分空間 V, W が与えられているとします.
$\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell$ が V の正規直交基底であるとき, W の正規直交基底
$\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell, \ldots, \vec{p}_m$ が存在します.

基底の延長　W の基底 $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell, \vec{q}_{\ell+1}, \cdots, \vec{q}_m$

$\xrightarrow{GS}$ $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell, \vec{p}_{\ell+1}, \cdots, \vec{p}_m$

直交補空間 (1)

$\{0\}^{\perp} = \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^{n\perp} = \{0\}$

R の部分空間 V に対して

$$V^{\perp} := \{\vec{w};\ (\vec{w}, \vec{v}) = 0\ (\vec{v} \in V)\}$$

は部分空間となります（2019L1712/07, 確認問題 VII）．これを V の直交補空間と呼びます．

2020L15 演習問題 VII.

$\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して $\vec{x}$ の V への直交射影を $\vec{v}$ とすると

$$\vec{x} - \vec{v} \perp V \quad \text{i.e. } \vec{x} - \vec{v} \in V^{\perp}$$

となります．$\vec{w} := \vec{x} - \vec{v}$ と定めると

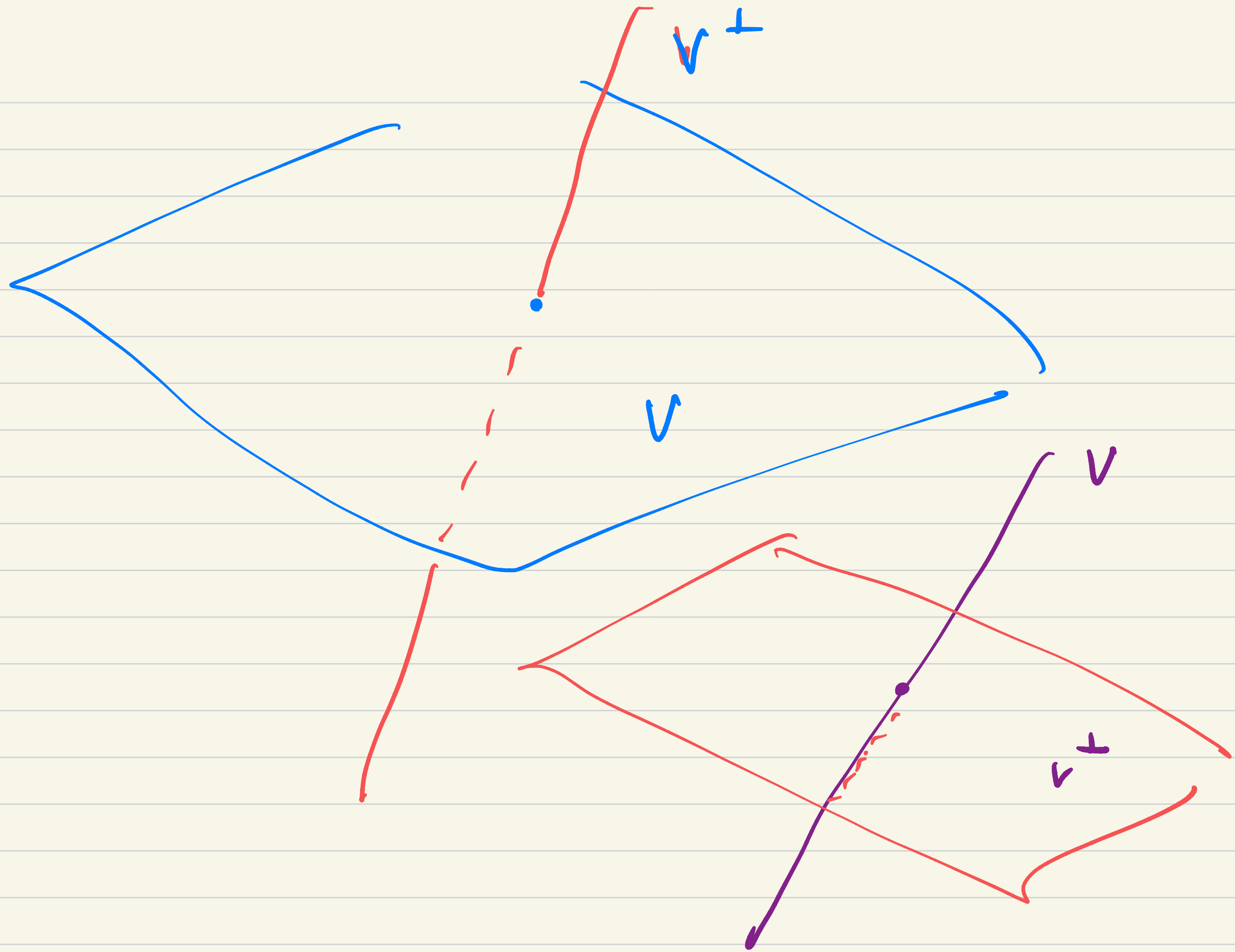
$$\vec{x} = \vec{v} + \vec{w},\ \ \vec{v} \in V, \vec{w} \in V^{\perp}$$

から

直和.

$$\mathbf{R}^n = V + V^{\perp}$$

であることが分かります．この和は直和となります．



$V^\perp$
V
V
$V^\perp$

直交補空間 (2)

実際

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{0},\quad \vec{v}\in V,\ \vec{w}\in V^{\perp}$$

とすると

$$\|\vec{v}\|^2=(\vec{v},\vec{v})=(\vec{v},-\vec{w})=-(\vec{v},\vec{w})=0$$

から $\vec{v}=\vec{0}$, さらに $\vec{w}=-\vec{v}=\vec{0}$ であることが分かります．以上で

$$\mathbf{R}^n=V\oplus V^{\perp}$$

であることが分かります．特に

orthogonal

$$\dim V+\dim V^{\perp}=n$$

が成立します．

$\rightarrow \boxed{(V^{\perp})^{\perp} = V}$

$V_1 \subset V_2 \Rightarrow V_2^{\perp} \subset V_1^{\perp}$

$\vec{w}_2 \in V_2^{\perp} \Leftrightarrow \forall \vec{v}_2 \in V_2 \quad (\vec{v}_2, \vec{w}_2) = 0.$

$\forall \vec{v}_1 \in V_1 \rightsquigarrow \vec{v}_1 \in V_2 \qquad (\vec{v}_1, \vec{w}_2) = 0$

$\rightarrow \vec{w}_2 \in V_1^{\perp}$

$V \subset (V^\perp)^\perp$ $\quad \forall \vec{v} \in V$ をとる.

$\forall \vec{w} \in V^\perp$ をとる. $\quad (\vec{w}, \vec{v}) = 0. \quad \to \quad \vec{v} \in (V^\perp)^\perp$

$\dim V = n - \dim V^\perp \qquad \dim V^\perp = n - \dim V.$

$$\dim (V^\perp)^\perp = n - \dim V^\perp$$
$$= n - (n - \dim V)$$
$$= \dim V$$

$\longrightarrow \quad V = (V^\perp)^\perp.$

$V_1 \subset V_2 \subset \mathbb{R}^n$

$\dim V_1 = \dim V_2$

$\Longrightarrow V_1 = V_2$

A : m行n列.

$F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\boxed{\mathrm{Im}\, A \subset \mathbb{R}^m}$$

$F_{{}^tA} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\vec{v} \in (\mathrm{Im}\, A)^{\perp}$

$\mathbb{R}^n$

$(\vec{v}, A\vec{w}) = 0 \quad \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^m.$

$\|$

$({}^tA\vec{v}, \vec{w})$

$\rightsquigarrow \ {}^tA\vec{v} = \vec{0} \geq 0$

逆

$(\mathrm{Im}\, A)^{\perp} = \mathrm{Ker}\, {}^tA.$

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\, A \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\, {}^tA.}$$

$\mathbb{R}^m = \mathrm{Im}\, {}^tA \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\, {}^t({}^tA)$

$= \mathrm{Im}\, {}^tA \oplus \mathrm{Ker}\, A.$