$\mathbb{C}^n$ の内積とノルム.

複素数ベクトルの内積とノルム

Unitary 行列，エルミート行列

Nobuyuki TOSE

V003b L17 Dec 2020

定義

Hamition

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$$

に対してエルミート内積とノルムを

$$(\vec{z}, \vec{w}) = z_1 \bar{w}_1 + \ldots + z_n \bar{w}_n$$

$$\|\vec{z}\|^2 = (\vec{z}, \vec{z}) = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$$

によって定義します.

性質

内積の性質

- $(\vec{u}+\vec{v},\vec{z})=(\vec{u},\vec{w})+(\vec{v},\vec{w})$
- $(\vec{u},\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u},\vec{v})+(\vec{u},\vec{w})$
- $(\lambda\vec{u},\vec{v})=\lambda(\vec{u},\vec{v})$, $(\vec{u},\lambda\vec{v})=\bar{\lambda}(\vec{u},\vec{v})$
- $(\vec{v},\vec{u})=\overline{(\vec{u},\vec{v})}$

ノルムの性質

- $\|\vec{z}\|\geq 0$, $\|\vec{z}\|=0\Leftrightarrow\vec{z}=\vec{0}$

$\boxed{\|\lambda\vec{z}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{z}\|.}$

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \quad a \angle z \qquad (\vec{a}, \vec{b}) = \tau\, \vec{a}\, \vec{b}$

列ベクトル

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$ に対して

$$(\vec{u})^* = (\overline{u_1} \cdots \overline{u_n}) = \overline{({}^t\vec{u})}$$

行ベクトル

$$\mathbf{b} = (b_1 \cdots b_n)$$ に対して

$$\mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \vdots \\ \overline{b_n} \end{pmatrix} = \overline{({}^t\mathbf{b})}$$

$$(\vec{z}, \vec{w}) = z_1\overline{w_1} + \cdots + z_n\overline{w_n}$$

$$= (\overline{w_1} \cdots \overline{w_n}) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{w})^* \vec{z}.$$

$$= \overline{\overline{z_1} w_1 + \cdots + \overline{z_n} w_n}$$

$$= \overline{(\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}$$

$$= \overline{(\vec{z})^* \vec{w}}$$

随伴行列

A: m×n, 実 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$

$\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tA\vec{y})$

$U \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ とします. $U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = (\vec{u}_1 \ \cdots \ \vec{u}_n)$ のとき

$$U^* := \left({}^t\bar{\mathbf{u}}_1 \ \cdots \ {}^t\bar{\mathbf{u}}_m\right) = (\mathbf{u}_1^* \ \cdots \ \mathbf{u}_m^*) = \begin{pmatrix} (\vec{u}_1)^* \\ \vdots \\ (\vec{u}_n)^* \end{pmatrix}$$

n行m列

を U の**随伴行列** (adjoint) と呼びます.

定理 $\vec{z} \in \mathbf{C}^n, \vec{w} \in \mathbf{C}^m$ に対して

$U^*\vec{w} \in \mathbb{C}^n$

$$(U\vec{z}, \vec{w}) = (\vec{z}, U^*\vec{w})$$

$U\vec{z} \in \mathbb{C}^m$

$$(U\vec{z}, \vec{w}) = (z_1\vec{u}_1 + \cdots + z_n\vec{u}_n, \vec{w})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} z_j \, (\vec{u}_j, \vec{w})$$

$$= \sum_{j} z_j \, \overline{(\vec{u}_j)^* \vec{w}}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\vec{u}_1)^* \vec{w} \\ \vdots \\ (\vec{u}_n)^* \vec{w} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\vec{z}, \begin{pmatrix} (\vec{u}_1)^* \\ \vdots \\ (\vec{u}_n)^* \end{pmatrix} \vec{w} \right) = (\vec{z}, U^* \vec{w})$$

例 $U_1 : m \times n$, $U_2 : n \times l$

$$\overset{m \times l}{(U_1 U_2)^*} = \underline{U_2^*}\,\underline{U_1^*}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &{}^t(U_1 U_2) \\ &= {}^tU_2\,{}^tU_1 \end{aligned}}$$

エ使ってもよい。

エルミート行列

A ∈ $M_n(\mathbb{R})$

$A^* = A \rightsquigarrow {}^tA = A$

に対しては

実対称.

n 次正方行列 $T \in M_n(\mathbf{C})$ が

$$T^* = T$$

を満たすとき，T を**エルミート行列**と呼びます.

定理 $T \in M_n(\mathbf{C})$ がエルミートであるとします．このとき

$$\Phi_T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in \mathbf{R}$$

$$\begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}.$

証明 ある $\vec{z} \neq \vec{0}$ に対して

$$T\vec{z} = \alpha\vec{z}$$

$$(T\vec{z}, \vec{z}) = (\vec{z}, T^*\vec{z}) = (\vec{z}, T\vec{z})$$

T: エルミート $T^* = T$

において

$$(T\vec{z}, \vec{z}) = (\alpha\vec{z}, \vec{z}) = \alpha\|\vec{z}\|^2, \quad (\vec{z}, T\vec{z}) = (\vec{z}, \alpha\vec{z}) = \bar{\alpha}\|\vec{z}\|^2$$

から $\boxed{\alpha = \bar{\alpha}}$ $\rightsquigarrow \alpha \in \mathbb{R}.$

$T = (T_{ij})$ $\quad T^* = T \iff \overline{T_{ij}} = T_{ji}$

$\uparrow$

T^*の j行 i列

3×3の場合は?

忘

A: $n \times n$ 実対称、 $\quad \Phi_A(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}.$

実対称行列の固有値はすべて実数

定理 実正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ が対称とします：${}^tA = A$. このとき

$$\Phi_A(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in \mathbf{R}$$

証明 $\bar{A} = A$ なので

$$A^* = {}^tA = A$$

から A はエルミートであることが分かります.

Unitary 行列 (1)

直交行列に相当.

$U \in M_n(\mathbf{C})$ が Unitary であるとは

$$U^*U = UU^* = I_n \tag{1}$$

が成立するときである． $U^*U = I_n$ とすると

$U^* = {}^t(\overline{U}) = \overline{({}^tU)}$

$$\det(I_n) = 1 = \det(U^*U) = \det(U^*)\det(U) = \det(\bar{U})\det(U)$$

$$= \cancel{\det(\bar{U})} = |\det(U)|^2$$

$= \overline{\det(U)} \cdot \det(U)$

$\boxed{\det {}^tU = \det U}$

から

$$|\det(U)| = 1 \longrightarrow \det(U) \neq 0$$

特に U は正則であることが分かります．これから

$$(1) \Leftrightarrow (1)' \ \ U^*U = I_n$$

Unitary 行列 (2)

$U = (\vec{u}_1 \ \cdots \ \vec{u}_n)$ に対して

$$U^*U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \\ \vdots \\ \vec{u}_n^* \end{pmatrix} (\vec{u}_1 \ \cdots \ \vec{u}_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \vec{u}_1 & \vec{u}_1^* \vec{u}_2 & \cdots \\ \vec{u}_2 * + \vec{u}_1 & \vec{u}_2^* \vec{u}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \left((\vec{u}_i)^* u_j \right)$$

$$\left((\vec{u}_i, \vec{u}_j) \right) = (\vec{u}_j, \vec{u}_i)$$

従って

$$U^*U = I_n \Leftrightarrow (\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

から

$$(1) \Leftrightarrow \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \text{は正規直交系}$$

Unitary 行列 (3)

$$I = \qquad\qquad = (\vec z, \vec w)$$

$$(U\vec z, U\vec w) = (U^* U\vec z, \vec w)$$

が任意の $\vec z, \vec w \in \mathbf{C}^n$ に対して成立することから

$$(1) \Leftrightarrow (U\vec z, U\vec w) = (\vec z, \vec w) \ \ (\vec z, \vec w \in \mathbf{C}^n)$$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$ 自明.

$\Leftarrow$ $\vec z = \vec a$ とおく $\|\vec a\|^2 = 0$

$(\vec a, \vec z) = 0 \ (\forall \vec z \in \mathbf{C}^n) \Leftrightarrow \vec a = \vec 0.$ $\quad \vec a = \vec 0$

$U \in M_n(\mathbb{C})$ が unitary

$\iff U^* U = U U^* = I_n$

$\iff U^* U = I_n$

$\iff \vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ は正規直交系

$\iff (U\vec{z}, U\vec{w}) = (\vec{z}, \vec{w})$

① $\iff \|U\vec{z}\| = \|\vec{z}\|$ $\quad (\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{C}^n)$

$(\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^n)$