3次正方行列のJordan標準形

前提 $A \in M_3(\mathbb{K})$ で固有値はすべて $\mathbb{K}$ に属するとします.

このとき $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ で

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

が成立するとして

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$

(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^3$

の3通りの場合があります.

(I) の場合 　A は必ず対角化できます. $\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$

(II) の場合．　A が対角化可能 $\Longleftrightarrow (A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)=O_3$

$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$　$\Longleftrightarrow$　$\dim V(\alpha)=2$

に注意します．　A が対角化できない場合．

$\dim V(\beta)=1$

$1 \leqq \dim V(\alpha) \leqq 2$

$$(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)\neq O_3 .$$

$$\dim V(\alpha)=1,\quad \dim V(\beta)=1$$

が成立します．

$$d_1(\lambda)=-\frac{\lambda-(2\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2},\quad d_2(\lambda)=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}$$

とすると

$$\longrightarrow\ 1=d_1(\lambda)(\lambda-\beta)+d_2(\lambda)(\lambda-\alpha)^2$$

が成立します．

$$\frac{1}{(\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)}=\frac{a}{\lambda-\beta}+\frac{bx+c}{(\lambda-\alpha)^2}$$

④

$$P_1 = d_1(A)(A-\beta I_3), \quad P_2 = d_2(A)(A-\alpha I_3)^2$$

とすると

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^3$$

$$\boxed{I_3 = P_1 + P_2 \quad (*)}$$

$$\underset{\vec{v}}{\overset{\|}{I_3 \vec{v}}} = \underbrace{P_1 \vec{v}}_{\in \mathrm{Im}(P_1)} + \overbrace{P_2 \vec{v}}^{\mathrm{Im}(P_2)}$$

となります. C-Hの定理から $(A-\alpha I_3)^2(A-\beta I_3) = O_3$ となりますから

$$P_2 P_1 = P_1 P_2 = d_1(A) d_2(A) \underbrace{(A-\beta I_3)(A-\alpha I_3)^2}_{O_3} = O_3$$

(*)に P_1 を左からかけると (resp. P_2)

$$P_1 = P_1^2 + \underbrace{P_1 P_2}_{O_3} = P_1^2, \quad P_2 = \underbrace{P_2 P_1}_{O_3} + P_2^2 = P_2^2$$

$$\boxed{I_3 = P_1 + P_2, \quad P_i P_j = \begin{cases} P_i & i = j \\ O_3 & i \neq j \end{cases}}$$

$$\mathrm{Im}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_2) = \mathbb{K}^3$$

$I_3 = P_1 + P_2$ から

$$\mathbb{K}^3 = \mathrm{Im}(P_1) + \mathrm{Im}(P_2)$$

$\vec{w}_1 = \vec{w}_2 = \vec{0}$

さらに

$$\mathbb{K}^3 = \underset{\vec{w}_1}{\mathrm{Im}(P_1)} \oplus \underset{\vec{w}_2}{\mathrm{Im}(P_2)}$$

$\vec{0}_3 = \boxed{P_1^2}\vec{v}_1 + \boxed{P_1 P_2}\vec{v}_2 = \vec{0}$

P_1

となります. $\vec{w}_1 = P_1 \vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = P_2 \vec{v}_2$ が $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0}$ i.e. $P_1\vec{v}_1 + P_2\vec{v}_2 = \vec{0}$

を満たすとすると P_1・とすると $P_1\vec{v}_1 = \vec{0}$ i.e. $\vec{w}_1 = \vec{0}$ 従って $\vec{w}_2 = \vec{0}$.

さらに C-H から $\vec{w}_1 \in \mathrm{Im}(P_1)$ は $\vec{w}_1 = d_1(A)(A-\beta I_3)\vec{v}_1$ と書けて

$$(A-\alpha I_3)^2 \vec{w}_1 = d_1(A)\underbrace{(A-\alpha I_3)^2(A-\beta I_3)}_{= O_3}\vec{v}_1 = d_1(A)O_3\vec{v}_1 = \vec{0}$$

が成立するので

$$\mathrm{Im}(P_1) \subset W(\alpha) := \mathrm{Ker}((A-\alpha I_3)^2)$$

固有値 α の一般固有空間.

同様に $\in V(\beta)$

$$\mathrm{Im}(P_2) \subset W(\beta) = V(\beta)$$

$\vec{w}_2 \in \mathrm{Im}(P_2)$

$= d_2(A)(A-\alpha I_3)^2 \vec{v}_2$

$\vec{0} = (A-\beta I_3)\vec{w}_2 = d_2(A)\underbrace{(A-\beta I_3)(A-\alpha I_3)^2}_{= O_3}\vec{v}_2$

$$\mathbb{K}^3 = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_2) \subset W(\alpha) \oplus W(\beta) \neq \mathbb{K}^3$$

部分

から

$$\mathrm{Im}(P_1) = W(\alpha),\quad \mathrm{Im}(P_2) = W(\beta) = V(\beta)$$

$$\underbrace{W(\alpha)}_{2\text{次元}} \oplus \underbrace{V(\beta)}_{1} = \underbrace{\mathbb{K}^3}_{3}$$

$$W(\alpha) \overset{=}{\supset} V(\alpha)$$

が従います。(一般固有空間分解)

~~$\mathrm{Ker}((A-\alpha I_3)^2)$~~

ここで $\forall \vec{v} \in W(\alpha)$ に対して $(A-\alpha I_3)\vec{v} = \vec{0}$ とすると

$\boxed{\dim W(\alpha) = 2}$ $=$ $\boxed{\dim V(\alpha) = 2}$

となるので A は対角化可能となります。従って $\exists \vec{q}_1 \in W(\alpha)$

$$A\vec{q}_1 = \alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2 \qquad (A-\alpha I_3)\cdot$$

$$\vec{q}_2 := (A-\alpha I_3)\vec{q}_1 \neq \vec{0}$$

$$c_1\vec{q}_1 + c_2\vec{q}_2 = \vec{0} \longrightarrow \cdots$$

となります。$\vec{q}_1 \nparallel \vec{q}_2$ を成立して $W(\alpha)$ の基底が $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ であることが分かります。さらに

$$(A-\alpha I_3)\vec{q}_2 = (A-\alpha I_3)^2\vec{q}_1 = \cancel{O_3\vec{q}_1} = \vec{0}$$

$$\to A\vec{q}_2 = \alpha\vec{q}_2$$

$V(\beta)$ は1次元で $\vec{q}_3 \in V(\beta),\ \vec{q}_3 \neq \vec{0}$ である $\vec{q}_3$ をとります。ここで

$$Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$$

とすると $\boxed{Q\text{ は正則}}$ で

$$AQ = (A\vec{q}_1\ A\vec{q}_2\ A\vec{q}_3) = (\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2\ \ \alpha\vec{q}_2\ \ \beta\vec{q}_3)$$

$$= (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\boxed{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}} = Q\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

から

$$Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & \beta \end{array}\right)$$

となります。（A の Jordan 標準形）

(III) $\Phi_A(\lambda)=(\lambda-\alpha)^3$ のとき. C-Hの定理から $(A-\alpha I_3)^3=O_3$

$\mathbb{K}^3 = V(\alpha)$

さらに「Aが対角化可能 $\Longleftrightarrow$ $A=\alpha I_3$」であることを分かります.

(i) $(A-\alpha I_3)^2 \neq O_3$ のとき. $\exists \vec{q}_1 \in \mathbb{K}^3$ に対して

$\vec{q}_1 \overset{A-\alpha I_3}{\longmapsto} \vec{q}_2 \overset{A-\alpha I_3}{\longmapsto} \vec{q}_3$

$$\vec{q}_3 := (A-\alpha I_3)^2\vec{q}_1 \neq \vec{0}$$

が成立します. $\vec{q}_2 := (A-\alpha I_3)\vec{q}_1$ とすると $\vec{q}_3=(A-\alpha I_3)\vec{q}_2$ で

$A\vec{q}_1=\alpha\vec{q}_1+\vec{q}_2$

$A\vec{q}_2=\alpha\vec{q}_2+\vec{q}_3$

$\boxed{\vec{q}_1,\ \vec{q}_2,\ \vec{q}_3 \text{ は LI}}$

であることが分かります. $(A-\alpha I_3)^3=O_3$ から $(A-\alpha I_3)\vec{q}_3=(A-\alpha I_3)^3\vec{q}_1=\vec{0}$

$A\vec{q}_3=\alpha\vec{q}_3$

となるので

$$=(A\vec{q}_1,\ A\vec{q}_2\ A\vec{q}_3)$$

$$A(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)=(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\1&\alpha&0\\0&1&\alpha\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha\vec{q}_1+\vec{q}_2\quad \alpha\vec{q}_2+\vec{q}_3\quad \alpha\vec{q}_3)$$

から $Q=(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$ とすると

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\1&\alpha&0\\0&1&\alpha\end{pmatrix}$$

となります.

Jordan標準形

(ii) $(A-\alpha I_3)^2 = O_3$ のとき．　$\mathbb{K}^3$ の基底を $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ とします．

$(A-\alpha I_3)^2 \vec{p}_j = \vec{o}$.

$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$

$(A-\alpha I_3)\vec{p}_1 \neq \vec{o}$, $(A-\alpha I_3)\vec{p}_2 \neq \vec{o}$

とすると $\vec{p}_1, (A-\alpha I_3)\vec{p}_1, \vec{p}_2, (A-\alpha I_3)\vec{p}_2$ が LI となります．これは，$\mathbb{K}^3$ が 3次元なので成立しません．よって高々1本の $\vec{p}_j$ が

演習．

$$(A-\alpha I_3)\vec{p}_j \neq \vec{o}$$

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$

を満たします．もしも1本もないと $\mathrm{Ker}(A-\alpha I_3) = \mathbb{K}^3$ から $A = \alpha I_3$ となります．従って1本が必ず条件を満たします．以下

$= V(\alpha)$

$= O_3 \vec{p}_1$

$$\vec{q}_2 := (A-\alpha I_3)\vec{p}_1 \neq \vec{o}$$

$(A-\alpha I_3)\vec{q}_2 = (A-\alpha I_3)^2 \vec{p}_1$

が成立するとします．$\vec{p}_1, \cancel{\vec{p}_2}, \vec{q}_3$ と $\mathbb{K}^3$ の基底をとります．このとき $(A-\alpha I_3)\vec{q}_3 = \vec{o}$

$\vec{q}_2$

となります．これから

$$A(\vec{p}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$\vec{o}$ と下対角が生じる．

から

$$(\vec{p}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)^{-1} A (\vec{p}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Jordan 標準形

I $\quad \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$

II $\quad \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & & \\ 1 & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$

III $\quad A = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & & \\ 1 & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$