

# 3次元の回転行列

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

2011年06月 at 駒場  
V002 Lec 15 2020年11月

2次元直交行列

$${}^t P P = I_2 \iff {}^t P P = P {}^t P = I_2$$



$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2)$$



$$P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2) \text{ かつ } \|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = 1$$

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

$${}^t P P = I_2$$

$$|{}^t P P| = |{}^t P| \cdot |P| = |P| \cdot |P| = |P|^2$$

$$|I_2| = 1$$

$$\leadsto |P| = \pm 1.$$

$$P \in O(2) \quad \rightarrow \quad |P| = \pm 1$$

$$|P| = 1$$

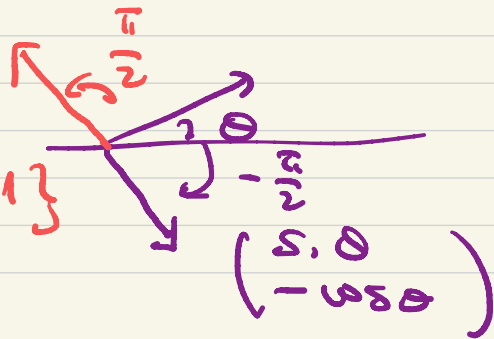
$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\exists \theta \in \mathbb{R}$$

$$|P| = -1$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$  1D 旋转行子群  $\{P \in M_2(\mathbb{R}); |P|=1\}$   
 $SO(2) = O(2) \cap SL_2(\mathbb{R})$



# 3次元の回転行列

- $A \in M_3(\mathbf{R})$  が

を満たすとします。このとき  $A$  は回転行列と呼びます。

- $A \in M_3(\mathbf{R})$  が

を満たすとき直交行列と呼びますが  $\det({}^t A) = \det(A)$  が一般的に成立しますから

$$\det({}^t AA) = \det({}^t A) \cdot \det(A) = \det(A)^2 \Rightarrow \det(I_3) = 1$$

から  $\det(A) = \pm 1$  となります。

$$A \in O(3)$$



$${}^t AA = A{}^t A = I_3, \det(A) = 1$$

$$A \in SL_3(\mathbf{R})$$



$$\Leftrightarrow A \in SO(3)$$

# 直交行列

$$B, A: n \times n$$

$$A\vec{v} = B\vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n \\ \Rightarrow A = B.$$

•  $A \in M_3(\mathbb{R})$  に対して次の条件は必要十分です。

(i)  $A$  は直交行列  ${}^tAA = A{}^tA = I_3$

(ii)  $(A\vec{x}, A\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3)$

(iii)  $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$

(iv)  $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3)$  とするとき

$$(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \delta_{ij}$$

従って、 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  は  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底

$$\begin{aligned} (A\vec{x}, A\vec{y}) &= (\vec{x}, {}^tAA\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \iff {}^tAA\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &\iff {}^tAA = I_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i) &\iff (ii) \iff {}^tAA = I_3 \\ &\iff |A| = \pm 1 \iff A \in O(3) \\ &\iff {}^tA = A^{-1} \\ &\iff A{}^tA = A \cdot A^{-1} = I_3 \end{aligned}$$

## 証明のヒントとなる事実

- $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tA\vec{y})$  ( $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^3$ )
- $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 4(\vec{x}, \vec{y})$
- $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3)$  とするとき

$${}^tAA = \begin{pmatrix} \|\vec{a}_1\|^2 & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & (\vec{a}_1, \vec{a}_3) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & \|\vec{a}_2\|^2 & (\vec{a}_2, \vec{a}_3) \\ (\vec{a}_3, \vec{a}_1) & (\vec{a}_3, \vec{a}_2) & \|\vec{a}_3\|^2 \end{pmatrix} = I,$$

# 回転行列の性質

$$|-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3| = (-1)^3 |\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3|$$

$$3 \times \dots \times \dots \times \dots |A - I| = (-1)^3 |A|$$

● **定理** Aが回転行列とする。このとき、ある  $\vec{x} \neq \vec{0}$  に対して

$$\begin{aligned} & \circ AA = I_3 \\ & \rightarrow \circ A = A^{-1} \end{aligned}$$

$$A\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \Phi_A(\vec{x}) = 0$$



● (証明)

$$\begin{aligned} B: \text{行列} \\ |B| \\ \Downarrow \\ |B| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A - I_3) &= \det({}^t A - I_3) \\ &= \det(A^{-1} - I_3) \\ &= \det(A^{-1}) \cdot \det(I_3 - A) \\ &= \det(A - I_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ (A - I_3) \\ &= \circ A - \circ I_3 \\ &= \circ A - I_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} - I_3 \\ &= A^{-1}(I_3 - A) \end{aligned}$$

● Aは固有値1を持つことになる。この  $\vec{x}$  を軸という。

$$|A| = 1.$$

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|} = 1.$$

# 軸が2方向あるときは？

- 定理  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  が1次独立とする。このとき

$$A\vec{x} = \vec{x}, A\vec{y} = \vec{y} \Rightarrow A = I_3$$

- (証明)  $V = \mathbb{R}\vec{x} + \mathbb{R}\vec{y}$  とする。

$\vec{z} \perp V, \vec{u} \in V$  とすると

$$A\vec{u} = \vec{u}$$

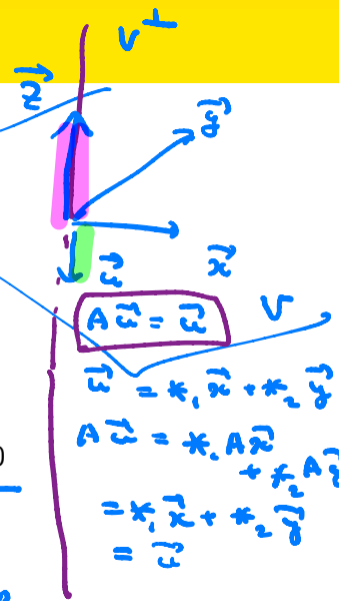
$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (A\vec{z}, \vec{u}) &= (A\vec{z}, A\vec{u}) \\ &= ({}^t AA\vec{z}, \vec{u}) = (\vec{z}, \vec{u}) = 0 \end{aligned}$$

以上から  $A\vec{z} \perp V$  が従う。また  $A$  は直交だから  $\|A\vec{z}\| = \|\vec{z}\|$

$$A\vec{z}, \vec{z} \in V^\perp \Rightarrow \vec{z}$$

$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$



# 軸が2方向あるときは？ (証明の続き)

- $\vec{z} \neq \vec{0}$  とする。このとき

$$A\vec{z} = \vec{z} \quad \text{または} \quad A\vec{z} = -\vec{z}$$

impossible.

- $A\vec{z} = -\vec{z}$  とすると

から

$$A(\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}) = (\vec{x} \ \vec{y} \ -\vec{z})$$

$$\det(A) \cdot \det(\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}) = \det(\vec{x} \ \vec{y} \ -\vec{z}) = -\det(\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z})$$

となり  $\det(A) = -1$  が従う。これは  $A$  が回転であることに矛盾。

- $A(\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}) = (\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z})$  において  $(\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z})$  は正則だから  $A = I_3$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  は LI. }  
 $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$

$A \neq I_3$  のときは

要

- $\vec{u}_1 \in \mathbf{R}^3$  が単位ベクトルで  $A\vec{u}_1 = \vec{u}_1$  とする。
- $\det(\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3) = 1$  を満たす  $\mathbf{R}^3$  の正規直交基底  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  をとる。
- $(A\vec{u}_2, \vec{u}_1) = (A\vec{u}_2, A\vec{u}_1) = (\vec{u}_2, \vec{u}_1) = 0$  から  $A\vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$ . 同様に  $A\vec{u}_3 \perp \vec{u}_1$
- このことから

$$A\vec{u}_1 = \vec{u}_1 \quad \uparrow A \in O(3)$$

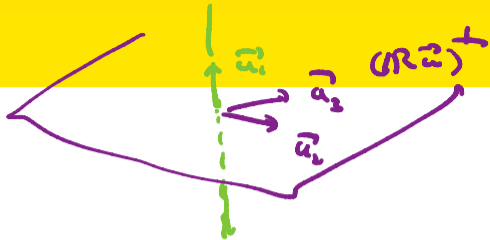
$$A(\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3) = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} = I$$

$(\mathbb{R}\vec{u}_1)^\perp$  は  $A$  の逆像

$$A\vec{u}_2 \in (\mathbb{R}\vec{u}_1)^\perp = 0\vec{u}_1 + a\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3$$

$$A\vec{u}_3 \in (\mathbb{R}\vec{u}_1)^\perp = 0\vec{u}_1 + c\vec{u}_2 + d\vec{u}_3$$



# A ≠ I<sub>3</sub>のときは (その2)

•  $U = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3)$  とすると  $U$  は直交行列である。

•  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$  とすると

$${}^t U A U = T$$

から  $T$  は

$${}^t T T = T {}^t T = I_3, \quad \det(T) = 1$$

を満たす。

$$\begin{aligned}
 {}^t T T &= {}^t ({}^t U A U) U A U \\
 &= {}^t U {}^t A ({}^t U) U A U = {}^t U {}^t A A U = \dots = I_3
 \end{aligned}$$

$I_3$   ${}^t U$  直交

$O(3)$  は  ${}^t(\cdot) = (\cdot)^{-1}$   
 2" 試して

$$A U = U T$$

↓  ${}^t U$ .

$${}^t U A U = T, \quad \in \text{SO}(3)$$

$$\downarrow U^{-1} A U = T$$

# A ≠ I<sub>3</sub>のときは (その3)

•  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とすると

$${}^t T T = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} = I_3$$

となり

2次元回転行列  
B ∈ O(2)

$${}^t B B = B^t B = I_2, \quad \det(B) = 1$$

∃ U ∈ SO(3)

となる。

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$${}^t U A U$$

$$|T| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = |B|$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

