3 次実対称行列の対角化

Nobuyuki TOSE

V001 Jan 05, 2020
V002 L13 Oct 30, 2020

定理 1

3 次の実対称行列 $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ が相異なる場合：$\alpha \neq \beta$

${}^tA = A$

$$V(\alpha) \perp V(\beta)$$

$\Phi_A(\alpha)$ をみたすこと

$V(\alpha) \neq \{0\}$.

が成立します.

$n=2$ で示してある.

$\vec{p} \in V(\alpha)$, $\vec{q} \in V(\beta)$ とします.

$A\vec{p} = \alpha\vec{p}$ $\quad A\vec{q} = \beta\vec{q}$

$$(A\vec{p}, \vec{q}) = (\alpha\vec{p}, \vec{q}) = \alpha(\vec{p}, \vec{q})$$

$$(A\vec{p}, \vec{q}) == (\vec{p}, {}^tA\vec{q}) = (\vec{p}, A\vec{q}) = (\vec{p}, \beta\vec{q}) = \beta(\vec{p}, \vec{q})$$

一般の n の実対称行列に対して成立.

から

$$0 \neq (\alpha - \beta)(\vec{p}, \vec{q}) = 0 \longrightarrow (\vec{p}, \vec{q}) = 0.$$

が従います.

$a, b, c \in \mathbb{R}$

エルミート内積を導入。

2 次の実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して以下が成立します.

1)

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) \ \Rightarrow \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

れころまじしか適用。

2) 回転行列 $\cancel{P}$ R $\in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成立します.

$$= \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2$$

$$D = (a+b)^2 - 4(ab - c^2)$$
$$= (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0$$

定理 2

定理 2

3 次の実対称行列 A に対して以下が成立します.

(1)

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma) \ \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$$

(2) 直交行列 $P \in O(3)$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

が成立します.

定理 2 の証明 (1)

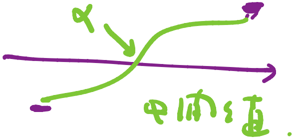
$\lambda^3 - \mathrm{tr}(A)\lambda^2 + * - \det(A)$

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - \cdots \in \mathbf{R}[\lambda]$$

$\Phi_A(\lambda) \to {+\infty \atop -\infty}$ $\left(\lambda \to {+\infty \atop -\infty}\right)$

であることから，ある $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$\Phi_A(\alpha) = 0$$



が成立します（中間値の定理）．この α に対して

$\exists \vec{q} \in \mathbb{R}^3 \quad A\vec{q} = \alpha\vec{q},\ \vec{q} \neq \vec{0}$

$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{q}\|}\vec{q}$

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, \quad \|\vec{p}\| = 1$$

を満たす $\vec{p} \in \mathbf{R}^3$ が存在します．次に GS の直交化を用いて $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底

$$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$$

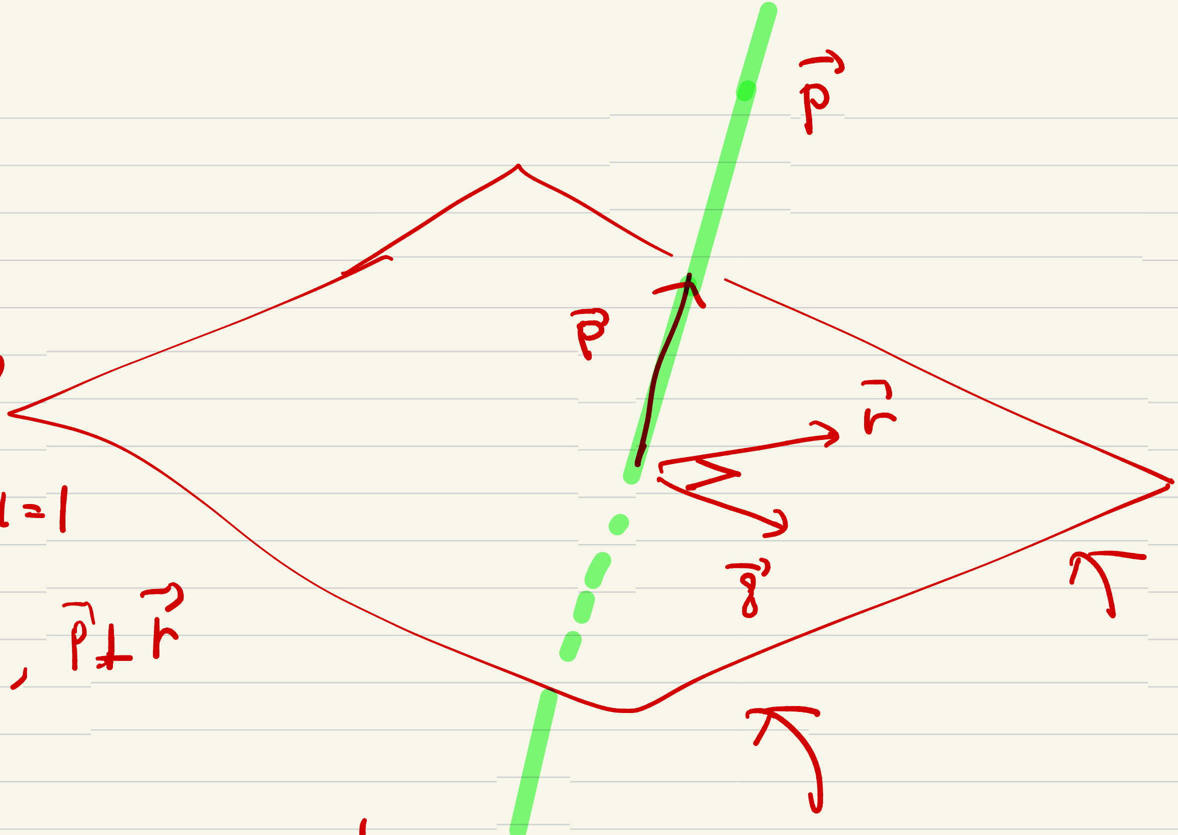
が構成できます．これを用いて直交行列 $P = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})$ を定義します．

2次元

$(\vec{q}, \vec{r}) = 0$

$\|\vec{q}\| = \|\vec{r}\| = 1$

$\vec{p} \perp \vec{q}, \quad \vec{p} \perp \vec{r}$



$$(\mathbb{R}\vec{p})^{\perp} = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 ; (\vec{p}, \vec{v}) = 0 \}$$

$P = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})$ が直交

$$\iff \begin{aligned} &\|\vec{p}\| = \|\vec{q}\| = \|\vec{r}\| = 1 \\ &(\vec{p}, \vec{q}) = (\vec{p}, \vec{r}) = (\vec{q}, \vec{r}) = 0 \end{aligned}$$

定理２の証明 (2)

$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p},\ A\vec{q} = *_1\vec{p} + *_2\vec{q} + *_3\vec{r},\ A\vec{r} = \#_1\vec{p} + \#_2\vec{q} + \#_3\vec{r}$$

をまとめて

$$AP = (A\vec{p}\ A\vec{q}\ A\vec{r}) = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \alpha & *_1 & \#_1 \\ 0 & *_2 & \#_2 \\ 0 & *_3 & \#_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & *_1 & \#_1 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} *_2 & \#_2 \\ *_3 & \#_3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$= B.$

となりますが, $B := \begin{pmatrix} *_2 & \#_2 \\ *_3 & \#_3 \end{pmatrix}$ と定義すると

P 直交 ${}^tP = P^{-1}$

$({}^tP)$ は逆.

$${}^tPAP = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \begin{matrix} *_1 & \#_1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & B \end{array}\right) \tag{1}$$

対称.　　対称.

となります.

定理 2 の証明 (3)

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \qquad {}^t({}^tA) = A$

${}^tA = A$

(1) の左辺を

$$ {}^t({}^tPAP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^t({}^tP) = {}^tPAP $$

と転置すると ${}^tPAP$ が対称であることが分かります．(1) の右辺を転置すると

${}^tPAP = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right)$

B : 対称.

$$ {}^t\left(\begin{array}{c|c} \alpha & *_1 \;\; \#_1 \\ \hline 0 & \\ & B \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \;\; 0 \\ \hline *_1 & \\ & {}^tB \\ \#_1 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & *_1 \;\; \#_1 \\ \hline 0 & \\ & B \\ 0 & \end{array}\right) $$

となりますから

$$ *_1 = \#_1 = 0, \qquad {}^tB = B $$

であることが従います．

B : 実対称.

定理2の証明(4)

B は対称であることが分かりましたから，ある回転行列 R_0 に対して

$${}^tR_0AR_0 = \begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

直交でもいい.

${}^tRR = {}^tRR$

$= I_3.$

となります．このとき $R := \left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_0}}\\ 0 & & \end{array}\right) \in O(3)$ となります．さらに

復習.

$= {}^t(PR)$

$$\boxed{{}^tR\,{}^tP}APR$$

$$= {}^tR\left(\begin{array}{c|cc}\alpha & 0 & 0\\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}}\\ 0 & & \end{array}\right)R = \left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{${}^tR_0$}}\\ 0 & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc}\alpha & 0 & 0\\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}}\\ 0 & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_0}}\\ 0 & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc}\alpha & 0 & 0\\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{${}^tR_0BR_0$}}\\ 0 & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc}\alpha & 0 & 0\\ \hline 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{array}\right)$$

定理２の証明 (5)

$P \in O(3),\ R \in O(3) \longrightarrow \underset{\overset{\parallel}{Q}}{PR} \in O(3)$

$${}^tQAQ = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

以上で

$$(PR)^{-1}A(PR) = {}^t(PR)A(PR) = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{array}\right)$$

において $PR \in O(3)$ となります．最後に $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$ であることに注意しましょう．このとき

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{(PR)^{-1}A(PR)}(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$$

から A の固有方程式の 3 根とも実数であることも示されました．

$$\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & & \\ & \lambda-\beta & \\ & & \lambda-\gamma \end{pmatrix}$$

P：正則

$$\boxed{\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda)}$$