3 次直交行列　$O(3)$

$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$|R| = 1$　回転行列.

$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$

2次直交行列.

Nobuyuki TOSE

回転ではない。

$|Q| = -1$

$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

もこの性質を満たす.

2020 V002

2020/10/30 SLIN L13 V003

2次元 α と β の復習.

A が定める2次形式

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ 実対称. $\longleftrightarrow$ $\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = ax^2 + 2cxy + by^2$

- $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
- $\exists R$ 回転行列 $\quad R^{-1} A R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(R^{-1} A \overbrace{R \cdot R^{-1}}^{= I_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

R^{-1} 回転

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

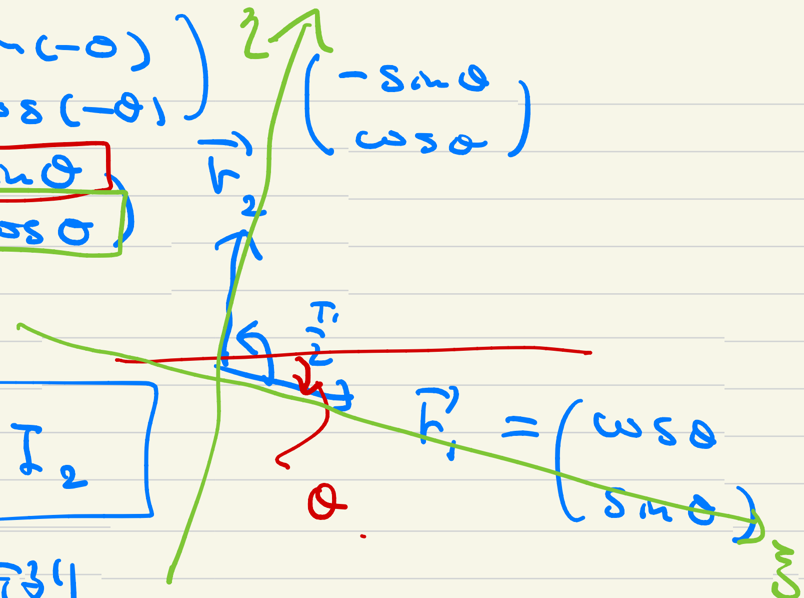
$$= \xi \vec{r_1} + \eta \vec{r_2}$$

R_θ 回転行列

$$R_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = {}^tR$$



$$\leadsto \boxed{{}^tR \cdot R = R \cdot {}^tR = I_2}$$

これを直交行列.

$$\boxed{(R_\theta \vec{v}, R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})}$$

$$(\vec{v}, \underbrace{{}^tR_\theta R_\theta}_{= I_2} \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$$

復習—2次元の場合

2次の実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ はある直交行列（または回転行列）P で対角化可能だった：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

なぜ直交行列を用いるのか？ $P^{-1} = {}^tP$ も直交なので

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(P^{-1}AP \cdot P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2\end{aligned}$$

復習—2 次元の場合 (2)

定義 $P \in M_2(\mathbf{R})$ が直交行列であるとは

$$ {}^tPP = P\,{}^tP = I_2 $$

を満たすときであった．$P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ のとき

グラム行列

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \end{pmatrix} (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} \|\vec{p}_1\|^2 & (\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ (\vec{p}_2, \vec{p}_1) & \|\vec{p}_2\|^2 \end{pmatrix} = I_2 $$

$$ = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1\vec{p}_1 & {}^t\vec{p}_1\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_2\vec{p}_1 & {}^t\vec{p}_2\vec{p}_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

から定義の条件は

${}^tPP = I_2 \iff$

$$ \|\vec{p}_1\|^2 = \|\vec{p}_2\|^2 = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0 $$

と同値である．

$\vec{a}, \vec{e} \in \mathbb{R}^n \qquad {}^t\vec{a}\,\vec{e} = (\vec{a}, \vec{e}) = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$

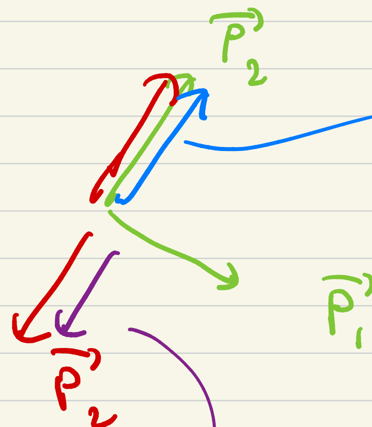
${}^tPP = I \rightarrow |{}^tPP| = |{}^tP|\cdot|P| = |P|^2$, $|I_2| = 1$

$\rightarrow |P| = \pm 1 \neq 0$. P 正則.

${}^tPP = I_2 \rightarrow {}^tP = P^{-1}$

$\cdot P^{-1}$

$\rightarrow P\cdot{}^tP = I_2$



$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ は
回転

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

折り返し，鏡映．

定義とその言い換え (1)

$(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$

$\parallel$

3 次正方行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ が直交行列であるとは

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3) \tag{1}$$

が成立するときである.

$({}^tPP = P\,{}^tP = I_3)$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

${}^tPP = I_3$

$\parallel$

$({}^tPP\vec{v}, \vec{w})$

$({}^tPP\vec{v} - \vec{v}, \vec{w})$

$\parallel$

$(({}^tPP - I_3)\vec{v}, \vec{w}) = 0$

定義とその言い換え (2)

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = ({}^tPP\vec{v}, \vec{w}) \qquad (2)$$

であることから定義の条件 (1) は

$${}^tPP = I_3 \qquad (3)$$

と同値である．実際 (2) を用いると (1) は

$$(({}^tPP) - I_3)\vec{v}, \vec{w}) = 0 \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3)$$

と同値であるが，さらに任意の $\vec{w} \in \mathbf{R}^3$ に対して成立することを用いると

$$({}^tPP - I_3)\vec{v} = \cancel{O_3}\ \vec{0} \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^3)$$

$({}^tPP - I_3)\vec{v} = \vec{0}$ $(\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3)$

と同値であることが分かる．これは

$${}^tPP - I_3 = O_3$$

と同値です．

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{0} \quad (\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^n)$$

$$\iff \vec{v} = \vec{0}$$

A n次正方行列

$$A\vec{v} = \vec{0} \quad (\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n) \iff A = O_n .$$

定義とその言い換え (3)

条件 (3) すなわち ${}^tPP = I_3$ が成立するならば，両辺の行列式をとると

$|{}^tPP| = |{}^tP||P| = |P|^2$

$$\det(P)^2 = \det(I_3) = 1 \quad 従って \quad \det(P) = \pm 1$$

となりますから，P は正則であることが分かります．従って ${}^tPP = I_3$ から

$$P^{-1} = {}^tP$$

$\cdot P^{-1}$

が成立します．さらに

$$P\,{}^tP = I_3$$

$P \cdot P^{-1} = I_3.$

も成立します．以上で条件 (3) は

$${}^tPP = I_3 \Longleftrightarrow {}^tPP = P\,{}^tP = I_3 \tag{4}$$

と同値であることが示されました．

定義とその言い換え (4)

$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \ (\forall \vec{v}, \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^n)$

$\Longleftrightarrow {}^tPP = I_3 \Longleftrightarrow {}^tPP = P\,{}^tP = I_3.$

$P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$ のとき

Pのグラム行列.

$${}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_3 \end{pmatrix} (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} \|\vec{p}_1\|^2 & (\vec{p}_1,\vec{p}_2) & (\vec{p}_1,\vec{p}_3) \\ (\vec{p}_2,\vec{p}_1) & \|\vec{p}_2\|^2 & (\vec{p}_2,\vec{p}_3) \\ (\vec{p}_3,\vec{p}_1) & (\vec{p}_3,\vec{p}_2) & \|\vec{p}_3\|^2 \end{pmatrix} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から定義の条件は

$$\|\vec{p}_1\|^2 = \|\vec{p}_2\|^2 = \|\vec{p}_3\|^2 = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$$

お互い直交.

と同値である.

大きさ1.

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \qquad {}^t\vec{a}\,\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$

$= a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$

定義とその言い換え (5)—まとめ

$(\vec{v},\vec{v}) = \|\vec{v}\|^2$

$\|P\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \quad (\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3)$

$\Downarrow \Uparrow \quad \uparrow$ 明らか.

$P \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

P:正則 $P^{-1} = {}^tP$

Pは直交行列である．すなわち $(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3)$

$\Leftrightarrow {}^tPP = I_3$

$\Leftrightarrow {}^tPP = P\,{}^tP = I_3$

$\Leftrightarrow \boxed{\|\vec{p}_1\|^2 = \|\vec{p}_2\|^2 = \|\vec{p}_3\|^2 = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0}$

ここで 3 次の直交行列全体の集合を

Orthogonal matrix

$$O(3) := \{P \in M_3(\mathbf{R});\ P\text{は直交}\}$$

直交行列

と定義します.

直交行列に関する注意

一般に $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $B \in M_{n,\ell}(\mathbf{R})$ に対して

AB n行ℓ列　${}^t(AB)$ = ℓ行 n列

$$ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA $$

${}^tB$ ℓ行n列

${}^tA$ n行m列

が成立することに注意しましょう．これを用いると

演習

$$ P_1, P_2 \in O(3) \Rightarrow P_1P_2 \in O(3),\ P_1^{-1} \in O(3) $$

→ ${}^tB\,{}^tA$ ℓ行 m列．

であることが分かります．さらに $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$ (\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}-\vec{w}\|^2\right) $$

が成立します．これから

演習

$$ \boxed{P \in O(3) \Leftrightarrow \|P\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^3)} $$

が成立することが示せます．